

# Examen - Dure 2H - Session mai 2015

Université de Bourgogne - Licence 2 - Info43 - Dept IEM

Tous les documents sont autorisés

## Partie 1 (6pts)

### Exercice 1.1:

A. Donner la forme close et la fonction génératrice pour les suites :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n = 1 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} & \text{si } n \geq 2, \end{cases}$$

et

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ -b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

B. Exprimer les suites  $a_n$  et  $b_n$  de manière plus simple.

C. Quelle relation existe entre les suites  $a_n$  et  $b_n$  ?

### Exercice 1.2:

A. Combien de mots on peut obtenir en permutant les lettres du mot 'chaussette' ?

B. Même question si on interdit que deux lettres identiques soient côte-à-côte.

## Partie 2 (14pts)

**Exercice 2.1:** Soit  $E$  l'ensemble des mots de tailles finies (éventuellement nulle) que l'on peut former avec les trois lettres **a**, **b** et **c**. On définit sur  $E$  la relation suivante:

Si  $e_1$  et  $e_2$  sont deux mots de  $E$ , alors on définit  $e_1 \leq e_2$  si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

- $e_1$  et  $e_2$  sont égaux;
- la longueur de  $e_1$  est strictement inférieure à la longueur de  $e_2$ ;
- les longueurs de  $e_1$  et  $e_2$  sont égales et le mot  $e_1$  est après  $e_2$  dans l'ordre lexicographique.

1) Est-ce que la relation  $\leq$  est une relation d'ordre sur  $E$ ? Pourquoi?

2) Que peut-on dire de cet ordre ? Pourquoi ?

Pour toutes les questions suivantes, l'ensemble  $E$  est remplacé par l'ensemble des mots de  $E$  de tailles inférieures ou égales à 2.

3) Y-a-t-il un élément minimum ? maximum ?

4) Y-a-t-il des éléments minimaux ? maximaux ?

5) Donner le diagramme de Hasse.

**Exercice 2.2:** On considère la fonction booléenne d'arités 4 suivante :

$$f(a, b, c, d) = (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{d}).$$

Donner le diagramme de Karnaugh de  $f$  et en déduire une forme normale disjonctive de  $f$ .

**Exercice 2.3 :** Soit  $E$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers positifs ou nuls inférieurs strictement à 13.

On définit sur  $E$  la relation  $(x, y) \sim (u, v) \iff 2$  divise  $u-x$  et  $3$  divise  $v-y$ .

Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $E$ . Déterminer l'ensemble quotient  $E/\sim$ .