L1 MaIE 11
2013/14

Examen
8 janvier 2014

Attention : Il faut toujours justifier les réponses !

Exercice 1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

(1) *Donner la définition de la dérivée* f' *de* f *en* $x_0 \in \mathbb{R}$.
(2) *Calculer la dérivée de* f *pour* $x \neq 0$ *de*

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & si\ x \neq 0, \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

(3) *Calculer la dérivée de* f *en* 0.

Exercice 2. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ *définie par*

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \ si\ x \neq 0, \\ 0 \ si\ x = 0. \end{cases}$$

(1) Est-elle monotone ?
(2) Est-elle injective ?
(3) Est-elle surjective ?

Exercice 3. *Calculer*

(1) $$\int \sin^3 x \, dx$$

(2) $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(3) $$\int_{-2}^{+2} \sqrt{4-x^2} \, dx$$

Exercice 4. *Considérer l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' + ay = 0,$$

où $a \in \mathbb{R}$ *est un paramètre.*

(1) *Donner la solution générale de cette équation pour* $a = 1$.
(2) *Donner la solution générale de cette équation pour* $a = 2$.
(3) *Trouver la fonction* y *de* x, *telle que*

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = x,$$
$$y(0) = \tfrac{1}{2} \ et\ y'(0) = -\tfrac{1}{2}.$$