UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
UFR Sciences & Techniques

Licence deuxième année.
Mathématiques pour l'Informatique (MaIE)
Examen du 18/06/2014 Durée : 2 heures.

Documents, ordinateurs, calculettes et téléphones portables interdits pendant l'épreuve.

Exercice 1 (4 points)
Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un répère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

1) 1-a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 + 10z + 25 = 0$.
   1-b) Donnez les solutions sous forme exponentielle et placez dans $\mathcal{P}$ leurs images A et B, A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est positive.
   1-c) Quelle est la nature du triangle OAB?
2) On considère l'application T de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -2iz + 5i$. Caractériser géométriquement l'application T.

Exercice 2 (4 points)
Soit la courbe paramétrée définie par : $M(t) \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & t\ln(1+t) \\ y(t) & = & 2\cos t - t^3 \end{array} \right.$

1) Donner un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ à l'ordre 3 en $t = 0$
2) En déduire le point stationnaire.
3) Dessiner l'allure de la courbe en ce point.

Exercice 3 (4 points)

1) Calculer $I = \int_e^{e^2} \frac{(\ln t)^3}{t} dt$. On posera $u = \ln t$
2) Calculer $J = \int xe^x dx$
3) 3-a) Déterminer a, b, c tels que : $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$
   3-b) Calculer $K = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

Exercice 4 (4 points)

1) Un condensateur de capacité C, initialement chargé, est déchargé à travers une bobine de résistance R. La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors : $R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$. ($t$ est le temps)
   1-a) Déterminer $q(t)$ sachant qu'au temps $t = 0$, la charge initiale est q_0.
   1-b) Calculer, en fonction du temps t, l'intensité du courant $i = -\frac{dq}{dt}$.
2) On considère l'équation différentielle (E) : $y" + 2y' + y = x^2e^{-x}$.
   2-a) Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E).
   2-b) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $y = e^{-x}Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme à chercher. En déduire les solutions de (E)

Exercice 5 (4 points)
On considère la fonction 2π-périodique, définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$ par : $f(x) = x$.

1) Tracer le graphe de f pour $x \in [-3\pi, 3\pi[$.
2) Calculer $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$ pour $n \geq 1$
3) Déterminer le développement en série de Fourier de f.