Mathématiques pour l'informatique et l'électronique, MaIE41

Deuxième session

19 Juin 2015 / 9 h — 11 h, hors tiers temps

Tout document autre que ceux distribués pendant l'épreuve n'est pas autorisé. Les téléphones portables et autres moyens de communication ne sont pas autorisés. Les calculettes personnelles sont autorisées si elles ne rentrent pas dans la catégorie précédente [1]. Chaque étudiant dispose du matériel adéquat. Aucun échange entre étudiants ne sera toléré une fois le sujet distribué.

Les réponses doivent être rédigées clairement, les théorèmes utilisés doivent être correctement cités.

1 Exercices

1. Des écrans de smartphone sont produits sur une chaîne de montage. Ils ont tous au plus 20 pixels défectueux. Combien d'écrans doit-on prendre pour en avoir, de manière certaine, 4 avec le même nombre de défauts ?

> **Solution :** On dénombre les écrans en appliquant le principe des tiroirs : on les regroupe par nombre de défauts, ce qui fait 21 classes. S'il n'y a pas 4 écrans avec le même nombre de défaut, alors il y a au plus 3 écrans par classe, ce qui fait un total de 63. Par contraposition, s'il y a au moins 64 écrans alors 4 d'entre eux ont le même nombre de défauts.

2. Donner une formule pour $(1+x)^n + (1-x)^n$ et $(1+x)^n - (1-x)^n$ avec une somme et des coefficients binomiaux. En déduire $\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k+1}$.

> **Solution :** On a $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$ et $(1-x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i x^i$. Par somme, $(1+x)^n + (1-x)^n = 2 \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{i} x^i = 2 \sum_{k}^{n/2} \binom{n}{2k} x^{2k}$. Par différence, $(1+x)^n - (1-x)^n = 2 \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{i} x^i = 2 \sum_{k}^{n/2} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1}$. En substituant 1 à x dans les deux formules et en divisant par 2 on obtient $2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k+1}$.

1. Autorisation conforme à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

3. (a) Que valent les dérivées $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x}$ et $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{1-x}$?

Solution : On a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{1-x} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

(b) Quelles sont les suites de séries génératrices respectives $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ et $\frac{2}{(1-x)^3}$?

Solution : On a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, donc $\frac{1}{1-x}$ est la série génératrice de la suite $(1)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, donc $\frac{1}{1-x}$ est la série génératrice de la suite $(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n-1}$, donc $\frac{2}{(1-x)^3}$ est la série génératrice de la suite $((n+1)(n+2))_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire une expression simple de la série génératrice de la suite $\left((n+1)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution : On a $(n+1)^2 = (n+1)(n+1) = (n+1)(n+2-1) = (n+1)(n+2) - (n+1)$, d'où $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

4. Graphes.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe complet soit cyclique. Justifier la réponse. (Indication : penser au nombre d'arêtes)

Solution : Un graphe complet à n nœuds a $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes. Un graphe cyclique à n nœuds a n arêtes. Si un graphe complet à n nœuds est cyclique alors $\frac{n(n-1)}{2} = n$, ce qui donne $n = 3$. Inversement, on vérifie immédiatement que le graphe complet à 3 nœuds est cyclique. Finalement, un graphe complet est cyclique si et seulement si le nombre de ses nœuds est 3.

(b) Si le nombre chromatique d'un graphe est 1, est-ce un graphe biparti (ou bipartite) ? Justifier la réponse.

Solution : Oui. Si le nombre chromatique est 1, il n'y a aucune arête. Pour toute partition des sommets en deux parties, toute arête a ses sommets dans chacune des parties. C'est la définition d'un graphe bipartite.

(c) Si le nombre chromatique d'un graphe est 2, est-ce un graphe biparti (ou bipartite) ? Justifier la réponse.

Solution : Oui. À partir d'une coloration, on sépare les sommets en deux parties selon la couleur. Si une arête a des extrêmites dans la même partie alors elles seront de la même couleur, ce qui est contradictoire avec la dfinition d'une coloration. Toute arête a ses sommets dans chacune des parties. C'est la définition d'un graphe bipartite.

2 Problème

Dans la suite de l'énoncé, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points suivants :

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{B}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}, \mathbf{C}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \mathbf{D}_\lambda\begin{pmatrix}\lambda\\4\end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.1 Généralités

1. Citer deux applications pratiques des courbes de Bézier.

Solution : Les polices de caractères, la CAO.

2.2 Transformations géométriques.

1. Donner la matrice carrée d'ordre 3 (en coordonnées affines généralisées) qui correspond à la symétrie centrale par rapport à l'origine du repère.

Solution :

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. En déduire les coordonnées des images par cette transformation des points **A**, **B** et **C**, respectivement notées $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ et $\mathbf{C}'$.

Solution : Leurs images sont respectivement les points de coordonnées

$$\mathbf{A}'\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{B}'\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}, \mathbf{C}'\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix},$$

2.3 Courbe de Bézier cubique

On considère la courbe de Bézier cubique $\mathbf{\Delta}$ définie pour $t \in [0; 1]$ par

$$\mathbf{Q}(t) \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{1-t}{2}\right)^3 \mathbf{C}' + 3\,\frac{1+t}{2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 \mathbf{B}' + 3\left(\frac{1+t}{2}\right)^2 \frac{1-t}{2}\mathbf{B} + \left(\frac{1+t}{2}\right)^3 \mathbf{C}$$

1. Construire géométriquement à partir des points de contrôle $\mathbf{C}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ uniquement, 3 points de la courbe et les 3 tangentes associées. Tracer l'allure de la courbe. Dans une question ultérieure, on tracera une autre courbe sur ce graphique.

Solution : Voir la dernière question.

2. Montrer que la courbe $\mathbf{\Delta}$ est symétrique par rapport à l'origine.

Solution : On a

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(-t) &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^3 \mathbf{C}' + 3\,\frac{1-t}{2}\left(\frac{1+t}{2}\right)^2 \mathbf{B}' + 3\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 \frac{1+t}{2}\mathbf{B} + \left(\frac{1-t}{2}\right)^3 \mathbf{C}\\ &= -\mathbf{Q}(t)\end{aligned}$$

Le symétrique de $\mathbf{Q}(t)$ est donc $\mathbf{Q}(-t)$ qui est aussi un point de la courbe.

3. Un logiciel de calcul formel donne

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} 3\,t - 3\,t^3 \\ 6\,t - 2\,t^3 \end{pmatrix}$$

Montrer que $y = 2x$ est une équation cartésienne de la tangente à la courbe $\mathbf{\Delta}$ en $\mathbf{A}$.

Solution : Le point $\mathbf{A}$ est l'origine du repère, une droite non verticale passant par $\mathbf{A}$ a une équation cartésienne de la forme $y = k\,x$ où k est une constante. La courbe passe par A quand le paramètre est 0. En ce point, la direction de la tangente est donnée par le vecteur $(3\ 6)^T$, la pente de la droite est donc 2, l'équation cartésienne cherchée est donc $y = 2x$.

2.4 Courbes de Bézier quadratique

Pour tout réel λ non nul, on considère la courbe de Bézier quadratique $\mathbf{\Gamma}_\lambda$ définie par le paramétrage

$$\mathbf{P}_\lambda(t) \overset{\text{déf}}{=} (1-t)^2\mathbf{A} + 2t(1-t)\mathbf{D}_\lambda + t^2\mathbf{C} \text{ où } t \in [0; 1]$$

1. Représentation graphique dans un cas particulier. Pour $\lambda = 4$, construire géométriquement à partir des points de contrôle $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}_4$ et $\mathbf{C}$ uniquement, 3 points de la courbe et les tangentes associées. Tracer l'allure de la courbe. On pourra éventuellement utiliser le graphique précédent.

Solution : Voir la dernière question.

2. Donner une formulation simple des coordonnées de $\mathbf{P}_\lambda(t)$ en fonction de t.

Solution : Tous calculs faits, on trouve

$$\mathbf{P}_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 2\,\lambda\, t\,(1-t) \\ 8\,t - 4\,t^2 \end{pmatrix}$$

3. Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe $\mathbf{\Gamma}_\lambda$ au point $\mathbf{A}$.

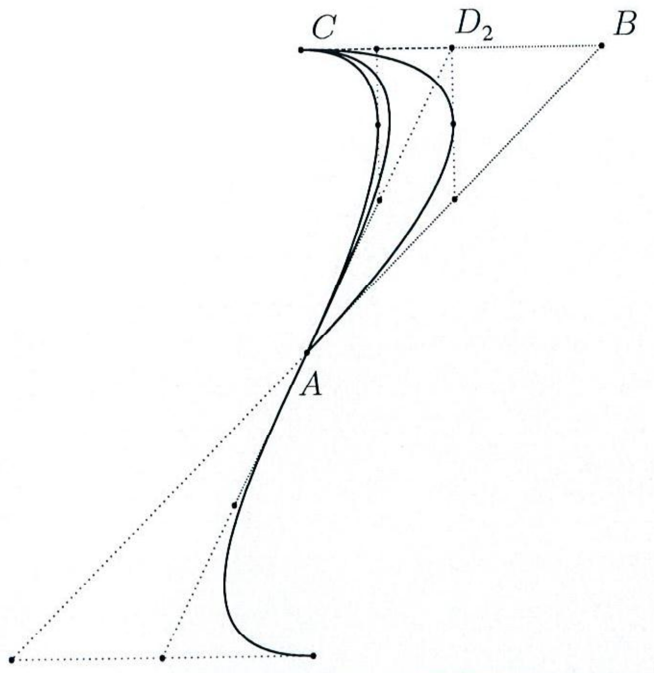
Solution : De la même façon que pour le cas cubique, on trouve $y = 4\,x/\lambda$.

4. Pour quelle valeur de λ les courbes $\mathbf{\Delta}$ et $\mathbf{\Gamma}_\lambda$ ont elle la même tangente au point $\mathbf{A}$.

Solution : Les deux tangentes seront confondues si leurs équations cartésiennes sont équivalentes. Cela donne $\lambda = 2$.

5. Pour la valeur de λ trouvée, tracer la courbe $\mathbf{\Gamma}_\lambda$. On pourra éventuellement utiliser le graphique précédent.

Solution :



6. Comment pourrait-on procéder pour voir si la courbe particulière $\mathbf{\Gamma}_\lambda$ obtenue ci-dessus est une bonne approximation de $\mathbf{\Delta}$?

Solution : Pour chaque point de la première courbe, on trouve le point le plus proche de la deuxième et vice versa. La plus grande distance trouvée donnera une idée de l'écart entre les courbes. Plus il est petit, plus les courbes sont proches.
On peut aussi travailler horizontalement en calculant le plus grand écart entre deux points situés sur chacune des courbes et l'un au dessus de l'autre.
On peut aussi considérer l'aire de région entre les courbes. Plus elle est petite, meilleure est l'approximation.