Université de Bourgogne
L2 MaPC31 2013/14

Examen

17 décembre 2013 ; durée : 2 h

L'usage de la calculatrice est interdit.

Ex 1. Question de cours.

a) Donner la définition d'un changement d'orientation pour un chemin différentiable.

b) Soit γ un chemin différentiable et $\tilde{\gamma}$ est obtenu de γ par un changement d'orientation. Montrer que la longueur ne dépend pas de l'orientation : $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$.

Ex 2. Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{aligned} x_1 =& \varphi_1(u,v) = u^2 - v^2 + 2v \\ x_2 =& \varphi_2(u,v) = 2vu - 2u. \end{aligned}$$

a) Calculer la matrice de Jacobi $d\varphi$ de cette application

b) Calculer le Jacobien de cette application, trouver tous les points (u,v) où φ n'est pas localement inversible.

c) Soit $f \circ \varphi = \exp(-u^2 - v^2)$, calculer $(\nabla f) \circ \varphi$

Ex 3. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(x,y) = 2x^3 + 3x^2 y - 2y^3 + 6y,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle

Ex 4. Calculer l'intégrale

$$\int\int_D (x+y)dxdy,$$

où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites d'équation :

$$y = 1; \quad 2y = -x; \quad y = x.$$

Ex 5. Le contour C est définie par

$$x_1(\theta) = \sin 2\theta, \quad x_2(\theta) = \pi \sin\theta - 2\theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

a) Montrer que c'est un contour fermé

b) Calculer l'aire à l'intérieur de ce contour