Examen

MaPC41 - Analyse Complexe

Juin 2015

Exercice 1. Faire des dessins des sous-ensembles du plan complexe $\mathbb{C}$ suivants:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| \geq 2\}$$
$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \sqrt{3}\}$$
$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$
$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i - 1| = 1\}$$
$$\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$$

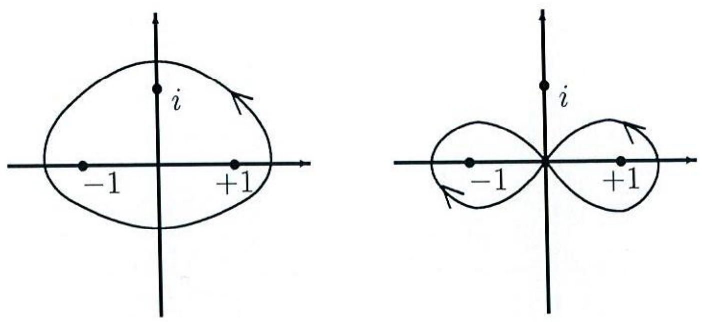
Exercice 2. Etant donnée une fonction holomorphe $f(z)$, montrer que:

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Re}f(z) = \frac{1}{2}f'(z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Im}f(z) = \frac{1}{2i}f'(z)$$

Exercice 3. Calculer l'intégrale de chemin

$$\oint_\gamma \frac{z+i}{(z^2-1)(z-i)}dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ suivants:



Est-il possible de deformer le premier chemin en l'autre sans sortir du domaine d'holomorphie de la fonction integrande?

L2

Exercice 4. Calculer, en utilisant le théorème des residus, l'intégrale suivant sur un cercle C de rayon 2 et centré sur l'origine:

$$\oint_C \frac{1}{(\sin z)(z-\frac{\pi}{2})^3} dz$$

[hint: rappeller la formule suivante pour le residu en $a \in \mathbb{C}$ d'une fonction meromorphe avec un pole de multiplicité n sur $a \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]$$

et verifier d'avoir consideré tous les poles à l'interieur du chemin C!]

Exercice 5.Soit $f(z)$ holomorphe sur $-a < \arg z < a < \pi$ et telle que

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ |\arg z| < a}} z f(z) = 0$$

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ |\arg z| < a}} z f(z) = 0$$

et $\int_0^{+\infty} f(x)dx < \infty$. Montrer que $\int_{\arg z = \alpha} f(z)dz < \infty$ si $-a < \alpha < a$ et que la valeur de cette integrale ne depend pas de α.

Exercice 6.Calculer l'integrale suivant sur l'axe réel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$$

L2

MaRC41