Math32 : Contrôle terminal

Décembre 2014 - Durée 2h00

Questions de cours. (5 points)
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Soient λ une valeur propre de f. Soit E_λ l'espace propre associé à λ. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que E_λ est stable par f.
2. Montrer que $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.
3. Montrer que tout vecteur de E_λ est un vecteur propre de $P(f)$.
4. Est-ce que E_λ est l'espace propre de $P(f)$ associé à $P(\lambda)$?
5. Si oui le démontrer, si non donner un contre-exemple.

Exercice 1. (8 points)
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner les valeurs de a et b pour que la décomposition de Dunford de A soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On pose $a = 3$ et $b = 0$. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} &= 1x + 3y + 0z \\ \dot{y} &= 0x + 1y + 0z \\ \dot{z} &= 0x + 0y + 2z \end{cases}$$

3. On pose $a = 1$ et $b = 1$. Soit (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note f l'ndomorphisme dont la matrice associée est A dans cette base.
   (a) Quelles sont les valeurs propres de f.
   (b) Déterminer u un vecteur propre associé à la plus grande des valeurs propres.
   (c) Montrer que (i, j, u) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Déterminer la matrice B associée à f dans cette nouvelle base.
   (e) Déterminer la décomposition de Dunford de B.
   (f) Déterminer la décomposition de Dunford de A.

L2

Exercice 2.(5 points)
Soit C la matrice compagnon d'ordre 3 suivante

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}$$

Enfin soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont C est la matrice associée dans la base canonique.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de f.
2. En utilisant que 3 est une valeur propre de f factoriser le polynôme caractéristique de f.
3. Déterminer la diagonalisabité et la trigonalisabilité de f.
4. Calculer les projecteurs spectraux de f.

Exercice 3.(4 points)
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On pose pour tout P de E, $\varphi_1(P) = P(0)$, $\varphi_2(P) = P(1)$, $\varphi_3(P) = P'(0)$ et $\varphi_4(P) = P'(1)$.

1. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^* (le dual de E).
2. Déterminer la base dont elle est la duale.

L2

MATH32