Examen Math41

La durée de l'examen est 2h00. Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1.
1. Etablir la convergence ou la divergence des intégrales suivantes :

$$i) \int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln t)^4} dt \qquad ii) \int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt \qquad iii) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \qquad iv) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(1+t)^3}}$$

2. Expliquer pourquoi l'intégrale $\int_0^1 \ln(x)\, dx$ est convergente et calculer sa valeur.
3. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{|\cos(t)|}{t} dt$$

est divergente.

Exercice 2. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,2]$, on pose $f_n(x) = (1-x)e^{-x^n}$.
1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,2]$.
2. Etudier la convergence uniforme.
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 (1-x)e^{-x^n} dx = \frac{1}{2}$.

Exercice 3. Soient $f_n(x) = e^{-nx}\sin(x)$ pour $n \geq 0$.
1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{\sin x}{1-e^{-x}}$, si $x > 0$.
2. La fonction f est-elle continue sur $[0, +\infty[$?
3. Etudier la convergence normale et uniforme de la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

Exercice 4. On considère l'e.v.n. réel $E = C[0,1]$ (l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$) muni de la norme sup : $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
1. Rappeler la définition de "partie fermée" de E et construire une partie fermée de E qui n'est pas bornée.
2. Montrer que la partie $B = \{f \in E,\ \|f\|_\infty \leq 1\}$ est fermée et bornée.
3. Rappeler la définition de "partie compacte" de E et montrer que B n'est pas une partie compacte de E.
4. Soit D une partie de E qui contient un nombre fini d'éléments. D est-elle une partie compacte ?
5. Construire une partie compacte de E qui contient un nombre infini d'éléments.