Université de Bourgogne — Jeudi 19 juin 2014

Licence Sciences, Technologies, Santé , 2ème année — 9h-11h

Examen de Mathématiques Session 2 - Math 42 -

Exercice 1 : On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 et F le sous espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Pour $(P, Q) \in E^2$ on pose

$$\varphi(P, Q) = \sum_{i=-1}^{2} P(i)Q(i) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

a) Vérifier que $\varphi(1, X + 2) = 10$ et que $\varphi(X, X^2) = 8$.
b) Montrer que l'application φ est un produit scalaire sur E.
c) Orhonormaliser la base canonique $\{1, X, X^2\}$ du sous espace vectoriel F.
d) Calculer le projeté orthogonal du polynôme $P = X^3$ sur F et la distance de P à F.

Exercice 2 : On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel avec $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base orhonormale canonique. On considère f l'endomorphisme dont la matrice est

$$M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Justifier que l'endomorphisme f est diagonalisable.
b) Calculer les valeurs propres de f et donner une base orthonormale de vecteurs propres.
c) Montrer que l'endomorphisme f est un automorphisme orthogonal. Interpréter géométriquement f.

Exercice 3 : Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E. On désigne par $f^\star$ l'adjoint de f.

1. Rappeler la définition de $f^\star$ et justifier l'existence et l'unicité en dimension finie.
2. Montrer que $\ker f^\star = \left(\mathrm{Im} f\right)^\perp$ et $\mathrm{Im} f^\star = \left(\ker f\right)^\perp$.
3. Soit F un sous espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par f si et seulement si son supplémentaire orthogonal $F^\perp$ est stable par $f^\star$.
4. Dans cette question on suppose $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$
   (a) Montrer que $\|f^\star(x)\| \leqslant \|x\|$.
   (b) soit $a \in E$ quelconque. Montrer que $f(a) = a$ si et seulement si $f^\star(a) = a$.
   (c) Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.