

Examen 1^{re} session. Techniques mathématiques appliquées

- ▷ **Exercice 1.** Une chaînette lourde de longueur L est pliée en deux et suspendue sur un clou. Au moment $t = 0$ on lui donne un coup de pouce et la chaînette commence à glisser vers le bas sans frottement avec la vitesse initiale v_0 , puis tombe de son clou. Déterminer le temps de glissement. Explorer, en particulier, le cas où v_0 est très petite.

Astuce. Le mouvement de la chaînette est décrit par l'équation de Newton. Soit m la masse de la chaînette, $x(t)$ la longueur de sa partie droite, g l'accélération de la chute libre. Alors

$$mx'' = \frac{mg}{L}x - \frac{mg}{L}(L - x), \quad \text{c'est à dire,} \quad x'' = \frac{2g}{L}x - g. \quad (1)$$

Trouvez

- la solution stationnaire de l'équation (1);
 - sa solution générale;
 - puis la solution avec les données initiales $x(0) = L/2$, $x'(0) = v_0$;
 - calculez ensuite le temps de glissement $T = T(v_0)$ en fonction de la vitesse initiale;
 - finalement, explorez le développement limité de cette fonction pour v_0 proche de 0 (on donnera le terme principal et la première correction).
- ▷ **Exercice 2.** Soit $q \in \mathbb{R}$, $-1 < q < 1$.

1. Trouver la somme de série

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{inx}. \quad (2)$$

2. En séparant les parties réelle et imaginaire de la série (2) terme à terme trouver les sommes de séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx. \quad (3)$$

3. Trouver les développements de Fourier de fonctions

$$U(x) = \frac{1 - q \cos x}{1 - 2q \cos x + q^2}, \quad V(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}. \quad (4)$$

Astuce. Utiliser l'unicité du développement de Fourier. (Surtout, ne pas calculer directement les intégrales donnant les coefficients de Fourier!)

4. Trouver le développement de Fourier de la fonction

$$T(x) = \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2}. \quad (5)$$

Astuce. Explorer la fonction $T(x) + 1$.

5. Trouver la primitive de $V(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}$.
6. Trouver le développement de Fourier de la fonction

$$W(x) = \ln(1 - 2q \cos x + q^2).$$

Astuce. Utiliser l'intégration terme à terme de la série de Fourier de V .

- 7*. Comment fixer le terme constant de la série pour W ?