

Epreuve écrite de Mai 2015 – Durée 2 heures

EPREUVE SANS DOCUMENTS, LES CALCULATRICES SONT AUTORISÉES  
LES TROIS EXERCICES SONT INDÉPENDANTS

**I – Cycle de Beau de Rochas d'un gaz parfait**

Une mole de gaz parfait décrit un cycle moteur constitué de quatre transformations réversibles.

**(a) Compression adiabatique**, Etat 1 ( $P_1, V_{\max}, T_1$ )  $\rightarrow$  Etat 2 ( $P_2, V_{\min}, T_2$ ), **(b) Chauffage isochore**, Etat 2 ( $P_2, V_{\min}, T_2$ )  $\rightarrow$  Etat 3 ( $P_3, V_{\min}, T_3$ ), **(c) Détente adiabatique**, Etat 3 ( $P_3, V_{\min}, T_3$ )  $\rightarrow$  Etat 4 ( $P_4, V_{\max}, T_4$ ), **(d) Refroidissement isochore**, Etat 4 ( $P_4, V_{\max}, T_4$ )  $\rightarrow$  Etat 1 ( $P_1, V_{\max}, T_1$ ). On note  $\tau = V_{\max}/V_{\min}$  le taux de compression. Soient  $C_p$  et  $C_v$  les capacités calorifiques molaires du gaz à pression et volume constant, respectivement. On pose  $\gamma = C_p/C_v$ . On donne  $R = 8.314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , la constante des gaz parfaits,  $\gamma = 1.4$  (gaz diatomique) et  $\tau = 10$ .

**I.1** – Exprimer  $C_p$  et  $C_v$  en fonction de  $\gamma$  et  $R$ . Rappeler, sans démonstration, la loi de Laplace en coordonnées  $(P, V)$  pour une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait. En déduire une loi analogue en coordonnées  $(T, V)$ . Énoncer la première loi de Joule des gaz parfaits.

**I.2** – **(i)** Pour chacune des quatre transformations (a), (b), (c) et (d) du cycle, indiquer quelles sont les fonctions analytiques  $P = P(V)$ , ou  $V = V(P)$ , correspondantes. Représenter alors l'allure du cycle en coordonnées de Clapeyron  $(P, V)$ .

**(ii)** Pour ces transformations, calculer les quantités de travail  $W_i$  et de chaleur  $Q_i$  échangées entre le gaz et le milieu extérieur, la variation d'énergie interne du gaz  $\Delta U_i$ , l'indice  $i$  prenant les valeurs  $a, b, c$  ou  $d$ . On exprimera les résultats en fonction des températures aux points 1, 2, 3, 4, de  $R$  et de  $\gamma$ . En déduire le travail  $W$  et la chaleur  $Q$  pour le cycle complet. Que vérifie-t-on pour  $W$  et  $Q$  ?

**I.3** – Définir le rendement  $\eta$  du cycle à partir des énergies échangées, et l'exprimer en fonction des températures aux points 1, 2, 3 et 4. Exprimer  $T_2$  en fonction de  $T_1, \tau$  et  $\gamma$  ainsi que  $T_4$  en fonction de  $T_3, \tau$  et  $\gamma$ . Montrer que le rendement est donné par

$$\eta = 1 - \frac{1}{\tau^{\gamma-1}} \quad (1)$$

**II – Equilibre liquide-vapeur de l'azote**

On considère de l'azote  $\text{N}_2$  en équilibre dans les phases liquide et vapeur. On note  $P$  la pression de l'azote et  $u$  son volume massique.

**Données** : Pressions de vapeur saturante,  $P_{s,1} = 10 \text{ bar}$  à  $T_1 = 104 \text{ K}$  et  $P_{s,2} = 25 \text{ bar}$  à  $T_2 = 120 \text{ K}$ ; Pentés de la courbe d'équilibre,  $(dP_s/dT)_1 = 0.6543 \text{ bar.K}^{-1}$  à  $T_1 = 104 \text{ K}$  et  $(dP_s/dT)_2 = 1.261 \text{ bar.K}^{-1}$  à  $T_2 = 120 \text{ K}$ ; Température du point critique,  $T_C = 126.19 \text{ K}$ .

**II.1** – Soit la courbe  $P(u)$  en annexe (à rendre avec la copie). **(i)** Situer le point critique  $C$  sur cette courbe. **(ii)** Indiquer les zones de (co-)existence des phases vapeur (V) et liquide (L). **(iii)** Indiquer les noms des différentes parties de la courbe  $P(u)$ .

- II.2** – Soit  $l_{\text{vap}}$  la chaleur latente de vaporisation de  $\text{N}_2$ . On note  $u_l$  et  $u_v$  les volumes massiques des phases liquide et vapeur. Donner la formule de Clapeyron exprimant  $l_{\text{vap}}$  en fonction des paramètres thermodynamiques. On précisera les unités et la signification des différents termes.
- II.3** – On étudie l'équilibre de  $\text{N}_2$  à  $T_1 = 104 \text{ K}$ . (i) On note  $u_{l,1}$  et  $u_{v,1}$  les volumes massiques du liquide et de la vapeur à cette température. Représenter, sur le diagramme  $P(u)$ , en justifiant la construction, l'allure de la courbe isotherme à cette température, en tenant compte des données. (ii) En déduire les valeurs numériques de  $u_{l,1}$  et  $u_{v,1}$ . (iii) Calculer la valeur de la chaleur latente  $l_{\text{vap},1}$  à  $T_1$ .
- II.4** – On étudie l'équilibre de  $\text{N}_2$  à  $T_2 = 120 \text{ K}$ . Déterminer la valeur de la chaleur latente  $l_{\text{vap},2}$  à  $T_2$ . On notera les volumes massiques  $u_{l,2}$  et  $u_{v,2}$ .
- II.5** – Que vaut la chaleur latente  $l_{\text{vap},C}$  à la température critique  $T_C$ ? Justifier la réponse. Décrire qualitativement l'évolution de  $l_{\text{vap}}$  en fonction de la température  $T$ .

### III – Condensateur

On considère un condensateur plan entre les armatures duquel se trouve un diélectrique (céramique isolante) de permittivité absolue notée  $\epsilon$ . On suppose que  $\epsilon = \epsilon(T)$ , où  $T$  est la température absolue. Le système est décrit par trois variables thermodynamiques,  $E$  (champ électrique),  $D$  (déplacement électrique) ainsi que la température  $T$ . Le seul travail est celui des forces électriques,  $\delta W = E dD$ . On rappelle la relation entre  $D$  et  $E$  (équation d'état),  $D = \epsilon(T)E$ . Les variables indépendantes sont  $E$  et  $T$ . On note  $U$ ,  $S$ ,  $F$  et  $G$ , l'énergie interne, l'entropie, l'énergie libre et l'enthalpie libre de ce système.

- III.1** – Montrer que pour une transformation réversible passant de l'état  $(E, T)$  à l'état  $(E + dE, T + dT)$ ,

$$\delta W = \epsilon E dE + E^2 \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_E dT = \epsilon E dE + E^2 \frac{d\epsilon}{dT} dT \quad (2)$$

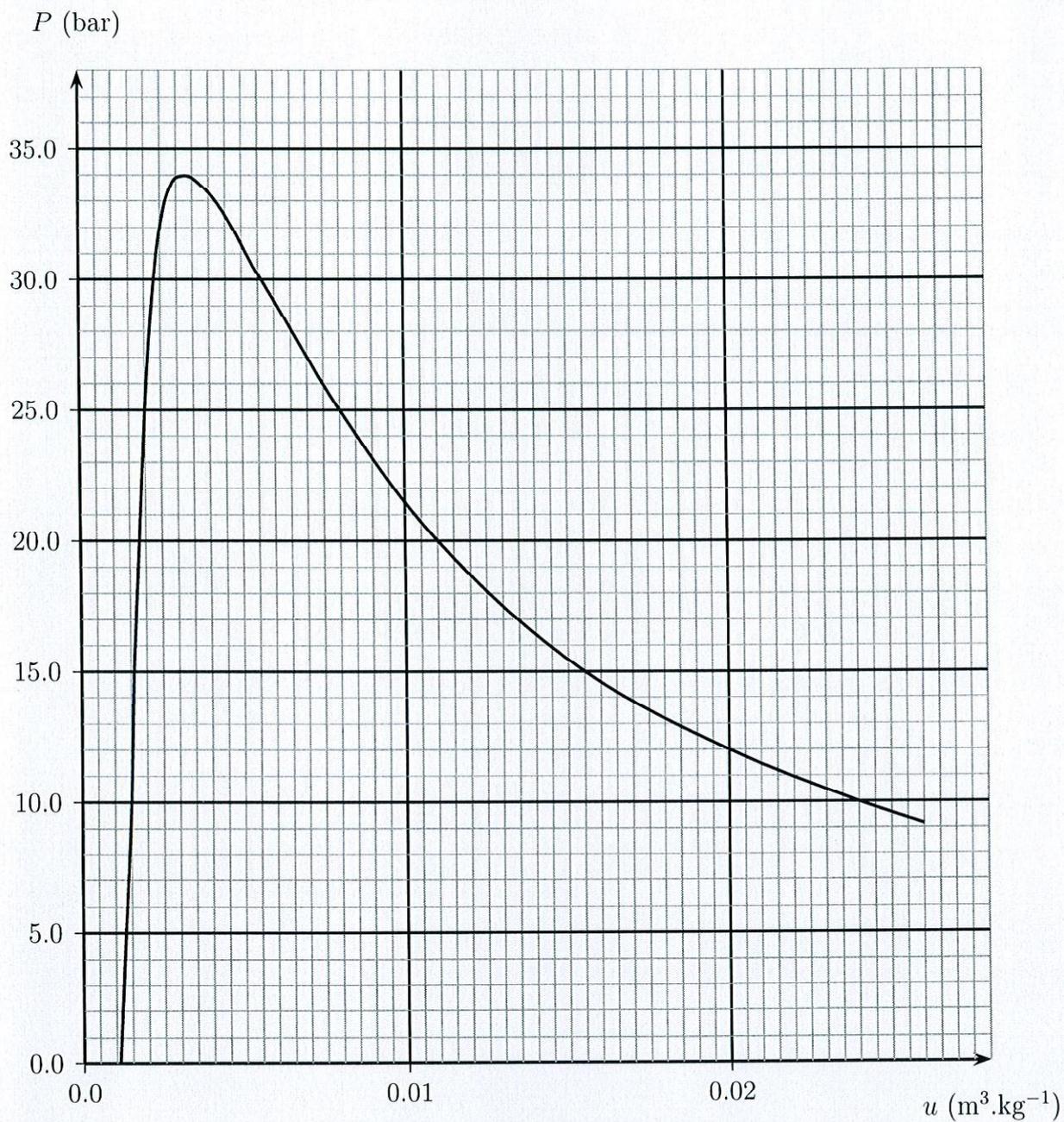
- III.2** – (i) Indiquer la définition de  $F$  et montrer que  $dF = -SdT + E dD$ . (ii) On définit l'enthalpie pour ce problème par  $H = U - DE$ . Calculer  $dH$ . Définir de même l'enthalpie libre  $G$  et calculer  $dG$ .

- III.3** – (i) Soit  $C_E$  la capacité calorifique à champ électrique constant. La quantité élémentaire de chaleur est donnée par  $\delta Q = C_E dT + \lambda dE$ . Montrer que

$$\lambda = TE \frac{d\epsilon}{dT} \text{ et } \left( \frac{\partial C_E}{\partial E} \right)_T = TE \frac{d^2 \epsilon}{dT^2} \quad (3)$$

- (ii) En déduire l'expression de la fonction  $C_E(T, E)$ . On notera  $C_E(T, 0)$  la constante d'intégration.

- III.4** – On charge réversiblement de façon isotherme le condensateur en faisant passer le champ électrique de 0 à  $E$ . Exprimer la quantité de chaleur  $Q$ , le travail  $W$  ainsi que  $\Delta U$ ,  $\Delta S$  et  $\Delta F$  pour cette transformation.



Equilibre liquide-vapeur de l'azote