MAIE1A

Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques
Licence Sciences L1, semestre 1, filière Electronique-Informatique, année 2017/2018.

Examen de Mathématiques MaIE1A, seconde session, **20 Juin 2018 (durée : 2h)**.
Les documents, les calculatrices et tout autre objet électronique ne sont pas autorisés.
Les 3 exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

exercice 1

1. On rappelle que $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ $(i^2 = -1)$.
   (a) Linéariser $(\cos(x))^3$.
   (b) En déduire une primitive sur $I\!R$ de la fonction $x \mapsto (\cos(x))^3$.
2. Soit $z = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$.
   (a) Ecrire z^2 sous forme algébrique.
   (b) Déterminer le module et un argument de z^2.
   (c) En déduire le module et un argument de z.
3. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $7 - 24i$.

exercice 2

1. Rappeler les valeurs de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ puis calculer :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^3},\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{x^3},\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+x^2} - 1}{x + x^2}.$$
2. Si a et b sont deux réels, vérifier que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Calculer :
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$
3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
$$x \mapsto e^{x^2+x},\ x \mapsto \ln(\ln x),\ x \mapsto \frac{(\ln x)^4}{x^3}.$$
   On pourra préciser l'intervalle sur lequel on calcule la dérivée.
4. Quelle est la dérivée de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$? En déduire la dérivée (sur $I\!R$) de la fonction arctan.
5. Donner pour chacune des fonctions suivantes une primitive sur un intervalle que l'on précisera :
$$x \mapsto \frac{6x}{2 + x^2},\ x \mapsto x^2 e^{-x^3},\ x \mapsto \frac{1}{x-3},\ x \mapsto \frac{1}{7 + x^2}.$$

6. Dériver la fonction $x \mapsto x \arctan(x)$. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction arctan.

exercice 3

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer $\gcd(37, 23)$.
2. Déterminer deux entiers (relatifs) u et v tels que $37u + 23v = 1$.
3. Résoudre l'équation diophantienne $37x+23y = 1$ (il s'agit de déterminer tous les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant $37x + 23y = 1$).