UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques
L1-MathPC 2A

ANNÉE 2017-2018
22 juin 2018

Examen - Session 2
Durée 2 heures (documents et calculatrices non autorisés)

(1) (**5 points**) Soit $E = \mathbb{R}^4$, et soit $f : E \to E$ l'application linéaire définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+w \\ -x-2y+z \\ 2x+4y-2z \\ y+z+w \end{pmatrix}$$

(a) Donner une base de $G = Imf$.
(b) Donner une base de $F = Kerf$.
(c) Quel est le rang de l'application linéaire f ?
(d) Quel est le rang de l'application linéaire $f \circ f$?

(2) (**4 points**) Si $V = \mathbb{R}^2$ et $g : V \to V$ l'application linéaire définie par $g(x,y) = (3x+2y, -x)$.
(a) Trouver les valeurs propres de g.
(b) Trouver les espaces propres de g.
(c) Trouver une base $\mathcal{B}$ de V tel que $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$ soit diagonale.

(3) (**4 points**) Soit $E \subset \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$. Soit h l'application linéaire de E dans E définie par $h(P) = 2P - P'$.
(a) Donner la matrice de $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(h)$ de h par rapport à la base $\mathcal{B}$.
(b) Montrer que $\mathcal{B}' = \{1+X, X^2+1, X+X^2\}$ est une autre base de E.
(c) Donner la matrice $B = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(h)$ de h par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

(4) (**3 points**) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}. Montrer que $M^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$.
(b) Proposer une expression pour M^n avec n un entier positif ou négatif.

(5) (**4 points**) Soit $E = \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \subset \mathbb{R}[X]$ le sous ensemble des polynômes de degré ≤ 3.
(a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
(b) Donner une base de E.
(c) Soit $h : E \to E$ l'application linéaire $h(P) = P'$, où P' est la dérivée de P. Donner la matrice de h par rapport à la base trouvée en (b).
(d) Trouver les valeurs propres et les espaces propres de l'application linéaire h.

11