

Logique et Algèbre 1
Examen

Question de cours 1.

- (1) Soient E un ensemble et A, B deux parties de E . Donner les définitions de "complémentaire de A dans E ", de "union de A et B " et de "intersection de A et B ".
- (2) Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E . Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $\complement(\complement A) = A$, et $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.

Question de cours 2.

- (1) Donner la définition de nombre premier.
- (2) Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur qui est un nombre premier.
- (3) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 1.

- (1) Soient p, n deux entiers positifs. Montrer que $\sum_{i=0}^n \binom{p+i}{p} = \binom{n+p+1}{p+1}$.
- (2) Soient n, p, k trois entiers tels que $n \geq p \geq k \geq 0$. Montrer que $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \binom{n}{p}$.
- (3) Soit n un entier positif. Montrer que $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.
- (4) Soient n, p deux entiers tels que $n \geq p \geq 0$. Montrer que $\sum_{i=0}^p \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} = 2^p \binom{n}{p}$.

Exercice 2.

- (1) Écrire sous la forme $a + ib$ le nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
- (2) Montrer que

$$\cos(\pi/8) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \sin(\pi/8) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

En déduire une écriture sous la forme $a + ib$ du nombre de module 3 et d'argument $\pi/8$.