L1

2017/18

Mathématiques Math2A (Analyse 2)

Examen Session 2 (20 juin 2018)

Temps : 2h00

Question 1 : [3 points]

Montrer que tout nombre irrationnel $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ peut être écrit comme la limite d'une suite de nombres rationnels. Notamment, $\exists \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, avec $r_n \in \mathbb{Q}$, telle que $\lim_{n\to\infty} r_n = p$.

Question 2 : [6 points]

Trouver la borne supérieure, borne inférieure, maximum et minimum (quand ils existent) des ensembles suivants :

$$A = \{\tfrac{\sin n\pi}{n}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}\} \qquad \textbf{[2 point]}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0\} \; , \qquad \textbf{[2 points]}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \; |x-1| \leq |x+1|\} \; . \qquad \textbf{[2 points]}$$

Question 3 : [6 points]

Étant donnée $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^{e^x \sin(x)} \cos(t) t^2 dt \; .$$

i) Justifier que F est dérivable. **[3 points]**
ii) Évaluer sa dérivée. **[3 points]**

Question 4 : [5 points]

i) Énoncer le théorème de Rolle. **[2.5 points]**
ii) Étant donnés $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues en $[a,b]$ et dérivables en $]a,b[$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c)$$

[*Suggestion* : Considérer la fonction $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, avec

$$h(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{pmatrix} \; ,$$

et appliquer le théorème de Rolle]. **[2.5 points]**

1L