UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques
L1-Math 2B

ANNÉE 2017-2018
22 juin 2018

Examen - Session 2

Durée 2 heures (documents et calculatrices non autorisés)

(1) (**4 points**) Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels, et soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire.

(a) Donner une définition du noyau $Ker\ f$.

(b) Montrer que le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E_1.

(c) Montrer que f est injective si et seulement si le noyau est $\{0\}$.

(2) (**3 points**) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}. Montrer que $M^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$.

(b) Par récurrence, déterminer une expression simple pour M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que pouvez vous dire si $n < 0$?

(3) (**5 points**) Soit $E = \mathbb{R}^4$, et soit $f : E \to E$ l'application linéaire définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+w \\ -x-2y+z \\ 2x+4y-2z \\ y+z+w \end{pmatrix}$$

(a) Donner une base de $G = Imf$.

(b) Donner une base de $F = Kerf$.

(c) Donner les matrices de f et de $f \circ f$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(d) Quel est le rang de l'application linéaire f ?

(e) Quel est le rang de l'application linéaire $f \circ f$?

(4) (**4 points**) Si $V = \mathbb{R}^2$ et $G : V \to V$ l'application linéaire définie par $g(x, y) = (3x+2y, -x)$.

(a) Trouver les valeurs propres de g.

(b) Trouver les espaces propres de g.

(c) Trouver une base $\mathcal{B}$ de V tel que $Mat(g; \mathcal{B})$ soit diagonale.

(5) (**4 points**) Soit $E \subset \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$. Soit h l'application linéaire de E dans E définie par $h(P) = 2P - P'$.

(a) Donner la matrice de $A = Mat(h; \mathcal{B})$ de h par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(b) Montrer que $\mathcal{B}' = \{1+X, X^2+1, X+X^2\}$ est une autre base de E.

(c) Donner la matrice de $B = Mat(h; \mathcal{B}')$ de h par rapport à la base $\mathcal{B}'$.