Examen session 2 - Compléments mathématiques. .

Durée 2h

Exercice 1. Soit E un ensemble, $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties et $\mathscr{F}(E, \{0;1\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$. On rappelle la définition de différence symétrique :

$$\text{si } A \text{ et } B \text{ sont deux parties de } E, \quad A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

À toute partie $A \in \mathscr{P}(E)$, on associe la fonction $\mathbb{1}_A : E \to \{0;1\}$ dite fonction caractéristique (ou indicatrice) de A définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = 1 \quad \text{si } x \in A\,; \qquad \mathbb{1}_A(x) = 0 \quad \text{si } x \notin A\,;$$

On note $\chi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{F}(E, \{0;1\})$ l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$.

1. Montrer que χ est injective.
2. Montrer que χ est surjective.
3. Pour A et B dans $\mathscr{P}(E)$, exprimer $\mathbb{1}_{A \cap B}$ et $\mathbb{1}_{A \triangle B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
4. En déduire que pour A, B et C dans $\mathscr{P}(E)$, on a
$$A \cap (B \triangle C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C) \qquad \text{et} \qquad A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

Exercice 2. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n.$$

1. Justifier que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{R}$.
2. On note x la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et y la limite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Parmi les réponses suivantes, une seule est vraie :
(a) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [x_n; y_n] = [x; y]$ (b) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]x_n; y_n[=]x; y[$ (c) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]x_n; y_n[= [x; y]$ (d) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n; y_n] =]x; y[$.
Rectifier les mauvaises réponses et démontrer la bonne.

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles non vides et $h : E \to F$ une surjection. Soient $X \subset E$, $Y \subset F$ et $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_p\}$ une partition de F.

1. Rappeler ce que signifie que h est une surjection ;
2. Rappeler ce que signifie que $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_p\}$ est une partition de F ;
3. Rappeler la définition de $h(X)$;
4. Rappeler la définition de $h^{-1}(Y)$;
5. Montrer que $\{h^{-1}(Y_1), h^{-1}(Y_2), \ldots, h^{-1}(Y_p)\}$ est une partition de E.

Exercice 4.

1. Calculer l'intégrale
$$\int_0^x t \cos(t)\, \mathrm{d}t.$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
$$(E_1) \qquad (1 + \cos^2(x))y' - y \sin(2x) = x \cos(x);$$
3. Déterminer la solution satisfaisant la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 5. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$(E_2) \qquad y'' - y' - 6y = \mathrm{e}^{-2x}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$.