L3 maths

Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2017-2018
Janvier 2018

# Algèbre 1
## Examen

**Question de cours.**

(1) Soient $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et $J$ un idéal bilatère de $B$. Montrer que $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal bilatère de $A$.

(2) Soient $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux surjectif et $I$ un idéal bilatère de $A$. Montrer que $\varphi(I)$ est un idéal bilatère de $B$.

(3) Déterminer un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ et un idéal bilatère $I$ de $A$ tels que $\varphi(I)$ ne soit pas un idéal bilatère de $B$.

(4) Soient $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et $I$ un idéal bilatère de $A$ tel que $I \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Montrer qu'il existe un unique homomorphisme $\psi : A/I \to B$ tel que $\varphi = \psi \circ \pi$ où $\pi : A \to A/I$ est la projection canonique.

**Exercice 1.** Soit $A$ un anneau commutatif. On appelle *caractéristique* de $A$ et on note $\chi(A)$ l'ordre de $1_A$ dans $(A, +)$ s'il est fini et 0 s'il est infini. Posons $n = \chi(A)$ et supposons que $n > 0$.

(1) Montrer que $n * x = 0_A$ pour tout $x \in A$.

(2) Montrer qu'il existe un homomorphisme $\mu : \mathbb{Z} \to A$ tel que $\mathrm{Ker}(\mu) = n\mathbb{Z}$.

(3) Montrer que, si $A$ est intègre, alors $n$ est un nombre premier.

**Exercice 2.** Soient $n \geq 1$ et $p_1, \ldots, p_n$ $n$ nombres premiers deux à deux distincts. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres $a \in \mathbb{Z}$ qui sont premiers à $p_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $A = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{Q}$.

(1) Montrer que $A$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

(2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{U}(A)$ des éléments inversibles de $A$.

(3) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ et $u = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$. Soit $J_u = \{\frac{a}{b} \mid a \in u\mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathcal{P}\}$. Montrer que $J_u$ est l'idéal de $A$ engendré par $u$.

**Exercice 3.** Posons $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(1) Déterminer les polynômes irréductibles dans $\mathbb{F}_2[X]$ de degré 4.

(2) Montrer que $X^4 - 3X^3 - 2X^2 + 2X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.