Université de Bourgogne
Licence 3 Mathématiques

Mardi 22 mai 2018
9h-12h

Examen d'Algèbre 2 Session 1 -

<u>Exercice</u> 1 (Questions de cours) :

1. Soient H et Q deux groupes. Donner une définition d'une structure de produit semi-direct $H \rtimes_\varphi Q$.
2. Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble X.
   (a) Soit x un élément de X. Rappeler les définitions du stabilisateur G_x et de l'orbite $\mathcal{O}(x)$.
   (b) Montrer que l'indice $[G : G_x]$ du stabilisateur G_x est égal au nombre d'éléments de l'orbite $\mathcal{O}(x)$.
   (c) Soient x et y deux éléments de X tels que $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$, Montrer que les stabilisateurs G_x et G_y sont conjugués.
3. Soit A un anneau intègre et a un élément de A non nul.
   (a) Donner les définitions de *a est irréductible dans A* et de *a est premier dans A*.
   (b) On suppose que l'anneau A est principal. Montrer l'équivalence entre *a est irréductible dans A* et *a est premier dans A*.

<u>Exercice</u> 2 : Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$, on note φ_g l'automorphisme de G dans lui-même défini par $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$. On note $\mathrm{Int}(G) = \{\varphi_g,\ g \in G\}$.

1. Démontrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$.
2. Soit $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Int}(G)$ défini par $\varphi(g) = \varphi_g$. Démontrer que φ est un morphisme de groupe. Quel est son noyau ?
3. En déduire que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(G)$.

<u>Exercice</u> 3 : Un groupe G est dit *métacyclique* s'il admet un sous-groupe normal N qui est cyclique et tel que G/N est aussi cyclique. Si tel est le cas on précise alors G est *$N-$métacyclique* .

1. Soit $n \geq 2$ un entier et $D_n = \langle r, s \rangle$ le groupe diédral d'ordre $2n$.
   (a) Quels sont les sous groupes normaux de D_n ?
   (b) En déduire que D_n est métacyclique.
2. Soit G un groupe N–métacyclique et H un sous groupe de G.
   (a) Soit $\pi_{|_H}$ la restriction à H de la projection canonique $\pi : G \longrightarrow G/N$.
      i. Montrer que le noyau de $\pi_{|_H}$ est égal à $H \cap N$, qu'il est normal dans H et cyclique.
      ii. Déduire que H est métacyclique.
   (b) Soit $H \lhd G$ tel que $H \subset Z(G)$ et G/H est cyclique. Montrer que G est abélien.
   (c) Soit p un entier naturel premier et G un groupe d'ordre p^2. Montrer que G est abélien.

<u>Exercice</u> 4 : Soit $d \in \mathbb{N}$ un nombre impair sans facteur carré avec $d \geq 5$. Soit

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{d}] = \{a + bi\sqrt{d} \in \mathbb{C} | a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que $= \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est un anneau intègre
   b
2. Soit $N(a + i\sqrt{d}) = a^2 + db^2$. Montrer que $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.
3. Déterminer les unités de l'anneau A.
4. Montrer que 2 est irréductible dans A.
5. Déterminer si 2 est premier dans A. (Indication : Calculer d'abord$(1 + i\sqrt{d})(1 - i\sqrt{d})$.)
6. L'anneau $= \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est-il principal ?

<u>Exercice</u> 5 : On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauß et $f : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ tel que pour tout $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ on a $f(a + ib) = \overline{a + 3b}$.

1. Montrer que f est un morphisme d'anneaux.
2. Montrer que le morphisme f est surjectif.
3. Montrer que $\ker f$ est l'idéal engendré par $1 + 3i$ de $\mathbb{Z}[i]$. On pourra utiliser $10 = (1 + 3i)(1 - 3i)$ et $i - 3 = i(1 + 3i)$.
4. En déduire que les anneaux $\mathbb{Z}[i]/(1 + 3i)$ et $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sont isomorphes.
5. Est ce que l'élément $1 + 3i$ est premier dans $\mathbb{Z}[i]$?