Licence de Mathématiques

2017-2018

Intitulé de l'enseignement : Algèbre linéaire et bilinéaire.

Année : L3

Date : 9 janvier 2018

Examen

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note.

Exercice 1 : Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes :

▷ **1)** Sur $\mathbb{R}^3$, $q(x, y, z) = xy + yz + zx$.

▷ **2)** Sur $\mathbb{R}^4$, $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$.

▷ **3)** Sur $\mathbb{R}^n$, $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n (i + j) x_i x_j$.

Exercice 2 : Pour la matrice suivante, calculer sa réduction de Jordan, sa décomposition de Dunford et donner les solutions du système différentiel associé :

$$X'(t) = AX(t), \text{avec } i = 1 \text{ ou } 2, \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien, a un vecteur unitaire de E et k un réel $k \neq -1$. On pose pour tout $x \in E$:

$$u(x) = k(a|x)a + x.$$

▷ **1)** Montrer que u est un automorphisme de E. Déterminer u^{-1}.

▷ **2)** Montrer que u est auto-adjoint. Pour quelles valeurs de k est-il unitaire ?

▷ **3)** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Exercice 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice antisymétrique (${}^tA = -A$)

▷ 1) Montrer que les valeurs propres de A (comme matrice sur $\mathbb{C}$) sont imaginaires pures.

▷ 2) Montrer que les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inversibles.

▷ 3) Montrer que $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est une matrice orthogonale (${}^tBB = I_n$) et qu'elle n'admet pas -1 comme valeur propre.

▷ 4) Enoncer et démontrer la réciproque de la question précédente.

Exercice 5 : Pour les formes quadratiques suivantes définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ déterminer leurs signatures :

▷ 1) $q(A) = Tr(A)^2$.

▷ 2) $q(A) = Tr({}^tAA)$.

▷ 3) $q(A) = Tr(A^2)$.

Pour la dernière question, on pourra montrer et utiliser que le sous espace des matrices symétriques et celui des matrices anti-symétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On utilisera aussi la question précédente.

Exercice 6 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On rappelle qu'une matrice A est dite normale si A et $A^* = {}^t\overline{A}$ commutent.

▷ 1) Démontrer que si A et B sont normales, et $AB = 0$, alors BA=0.

▷ 2) Montrer que si A est normale alors $Tr(AA^*) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$, où les λ_i sont les valeurs propres de A.

▷ 3) En admettant qu'une matrice à coefficients complexes est trigonalisable dans une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien usuel, démontrer la réciproque de la question précédente.

▷ 4) Démonter que si A, B et AB sont normales, alors BA aussi.