Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques

Année universitaire 2017–2018
Département de Mathématiques

L3 — Analyse fonctionnelle
Épreuve finale du 24 mai 2018 — Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Justifier vos affirmations.
Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Exercice 1. On considère la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

1a. Calculer les coefficients de Fourier $\hat{f}(n), n \in \mathbb{Z}$;

1b. Utiliser l'égalité de Parseval pour établir que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2. On considère la suite de fonctions positives continues $(p_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ définie par

$$p_n(x) = c_n(1-x^2)^n \chi_{[-1,1]}(x),$$

où c_n est un nombre réel positif tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)\, dx = 1$, $n \geq 1$.

2a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x(1-x^2)^n\, dx$ et montrer que $c_n \leq n+1$.

2b. Pour tout $0 < \delta < 1$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\{|x|>\delta\}} p_n(x)\, dx = 0$.

2c. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)p_n(t)\, dt$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

2d. Si de plus f est à support dans l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, vérifier que les fonctions f_n sont polynomiales sur $[-1/2, 1/2]$.

2e. En déduire le théorème de Weierstrass : Soit g une fonction continue sur un segment $[a, b]$, alors g est limite uniforme sur $[a, b]$ de fonctions polynomiales.
Indication : Considérer un prolongement de g en une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ à support dans $[a-1, b+1]$.

T.S.V.P.

Exercice 3. Soient H un espace de Hilbert complexe séparable et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. On considère une forme linéaire continue $\ell\colon H \to \mathbb{C}$ et on définit les nombres complexes $\alpha_k := \overline{\ell(e_k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

3a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2 \leq \|\ell\|^2$. (Considérer $v_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k$.)

3b. En déduire que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k e_k$ définit un élément de H que l'on notera v.

3c. Montrer que pour tout $x \in H$ on a $\ell(x) = \langle x, v\rangle$.

3d. Établir que $\|\ell\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k|^2\right)^{1/2}$.

3e. Existe-t-il une forme linéaire continue $L\colon H \to \mathbb{C}$ telle que $L(e_k) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$?

Exercice 4. Soit $f = \chi_{[-1,1]}$.

4a. Calculer la transformée de Fourier de f.

4b. Déterminer la transformée de Fourier-Plancherel de la fonction définie presque partout par $g(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.