Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Janvier 2018

CALCUL DIFFERENTIEL - EXAMEN (3 heures)

Les quatre exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

I *(10 pts)*

On considère l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 - 1 = 0\}$, et le point $A = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

1. *(2 pts)* Montrer que $\mathcal{E}$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, qui ne contient pas le point A.
2. *(2 pt)* Soit $M = (a,b,c) \in \mathcal{E}$. Donner l'équation du plan tangent $T_M\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}$ au point M.
3. *(2 pts)* Déterminer l'ensemble $\mathcal{L}$ des points de $\mathcal{E}$ en lesquels le plan tangent $T_M\mathcal{E}$ est parallèle au plan Oxy.
4. On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que le plan tangent $T_M\mathcal{E}$ contienne le point A.
   (a) *(2 pts)* Montrer que $\mathcal{C}$ est l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le plan $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 4y + z - 1 = 0\}$.
   (b) *(2 pts)* En déduire que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

II *(4 pts)*

On considère la fonction $f\colon (x,y) \mapsto x^4 + x^3y + 2y^4 + x^5 + 4x^4y + y^6$.

1. *(1 pts)* Montrer que l'origine est un point critique de la fonction f.
2. *(2 pts)* Etudier le signe du polynôme $P(x,y) = x^4 + x^3y + 2y^4$.
3. *(1 pt)* En déduire la nature du point critique O pour la fonction f.

III *(4 pts)*

On rappelle que les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* sont définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On considère le demi-plan ouvert $\mathcal{P} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u > 0\}$ et l'application $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(u,v) = (x,y) = (u\cosh(v), u\sinh(v)).$$

1. *(2 pts)* Montrer que φ est un difféomorphisme local en tout point de $\mathcal{P}$.
2. *(2 pts)* Montrer que φ est un difféomorphisme de $\mathcal{P}$ sur l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, |y| < x\}$ de $\mathbb{R}^2$.

IV *(4 pts)*

On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^3 - y^2 + x^2 - y = 0\}$.

1. *(2 pts)* Montrer que $\mathcal{C}$ est, au voisinage de l'origine, le graphe d'une fonction $\varphi\colon x \mapsto y = \varphi(x)$.
2. *(2 pts)* Calculer les dérivées $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.