Université de Bourgogne
Département de mathématique
UFR Sciences et Techniques

L3 mathématiques
UE-Intégration.

Calcul Intégral

Examen du 8 janvier 2018
durée : trois heures

Notations. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport λ. Établir les égalités suivantes en justifiant l'existence de chaque intégrale et les passages à la limite :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[0;+\infty[} \frac{f(x)}{1+x^n}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0;1]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$ 2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[0;+\infty[} \frac{x^{n-1}f(x)}{1+x^n}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[1;+\infty]} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda(x)$.

EXERCICE 2. Soient $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(t,x) = \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$ et, pour $x>0$, $G(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} g(t,x)\,\mathrm{d}\lambda(t)$.

1. Établir pour tout $u \geq 0$ on a $1 - e^{-u} \leq u$.
2. Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (*Indication : on pourra utiliser la question 1 et étudier successivement les cas* $0 < a \leq x \leq 1$ *et* $1 \leq x \leq b < +\infty$)
3. En justifiant vos propos, montrer que G est $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire la valeur de G.

EXERCICE 3. **Les questions 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.**
On considère le triangle $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$ et on pose $I = \displaystyle\int_T \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$.

1. (a) Au moyen d'un théorème du cours que l'on précisera, montrer que $I = -\displaystyle\int_{]0;1[} \frac{\ln(1-x^2)}{x}\,\mathrm{d}\lambda(x)$ puis que $I \in \mathbb{R}_+$.
   (b) Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x^2)$ au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.
   (c) En utilisant un théorème du cours que l'on précisera, exprimer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ en fonction de I.
2. On note $S = \left\{(\theta,t) \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R} : 0 < t < h(\theta)\right\}$ où h est la fonction définie par
$$h(\theta) = \tan\theta \cdot \mathbb{1}_{\left]0;\frac{\pi}{6}\right[}(\theta) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbb{1}_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[}(\theta).$$
   Remarque : sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $h(\theta) = \min\left\{\tan\theta; \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right\}$.
   (a) Donner une représentation graphique de S.
   (b) Soit l'application φ définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}_+^*$ par
$$\varphi(\theta,t) = (\sin\theta + t\cos\theta, \sin\theta - t\cos\theta).$$
   Montrer que φ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de S sur T.
   Pour cela, on pourra utiliser les étapes suivantes :
      i. Montrer que φ est injective ;
      ii. Montrer que $\varphi(S) \subset T$
      (*Indication : on pourra utiliser, après l'avoir démontrée, la relation* $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$) ;
      iii. Soit $(x,y) \in T$. Calculer $(\theta,t) \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(\theta,t) = (x,y)$ puis montrer que $(\theta,t) \in S$;
      iv. Conclure.
   (c) Au moyen du changement de variable $(x,y) = \varphi(\theta,t)$, montrer que $I = \frac{\pi^2}{12}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.