Université de Bourgogne *Licence de Mathématique et de Mécanique* - SPI Méca
Département de Mathématiques *Cours Calcul Scientifique*

Examen du 24 mai 2018

Durée deux heures, les documents et les téléphones portables sont interdits

1. *Séries de Fourier* (8) :
   Soit pour $x \in [-\pi, \pi]$
   $$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \pi/2, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$
   et $f(x + 2\pi n) = f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Donner le graphe de $f(x)$ pour $|x| \leq 3\pi$.
   (b) Calculer les coefficients de la série de Fourier. Donner les coefficients avec indices paires et impaires.
   (c) En conclure la décroissance des coefficients pour $n \to \infty$.
   (d) Donner la somme de la série pour $x = 0$.
2. *Équation de Poisson* (8) :
   (a) Résoudre analytiquement pour $x \in [-1, 1]$ l'équation
   $$u''(x) + 2u'(x) + u(x) = \cos(\pi x), \quad u(-1) = u(1) = 0. \qquad (1)$$
   (b) Écrire un code en Matlab pour calculer la solution de (1) numériquement. Utiliser le code cheb.m pour les matrices de différenciation. Prendre $N = 32$ polynômes, donner le graphe de la solution, calculer la norme de la différence avec la solution exacte.
3. *Stabilité et méthode de Heun* (4) :
   La méthode de Heun pour l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ avec $t_{n+1} - t_n = h$ et $y_n := y(t_n)$ est donnée par
   $$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f(t_{n+1}, y_n + hK_1), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2). \end{aligned}$$
   Donner les conditions de stabilité pour cette méthode. En conclure (en comparant avec la solution exacte pour le problème $y' = \lambda y$) que la méthode est de deuxième ordre.