L3 SPi Méca - session 2

Université de Bourgogne
Département de Mathématiques

Licence de Mathématique et de Mécanique
Cours Calcul Scientifique

Examen du 28 juin 2018

Durée deux heures, les documents et les téléphones portables sont interdits

1. *Séries de Fourier* (8) :
   Soit pour $x \in [-\pi, \pi]$
   $$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
   et $f(x + 2\pi n) = f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Donner le graphe de $f(x)$ pour $|x| \leq 3\pi$.
   (b) Calculer les coefficients c_k, $k \in \mathbb{Z}$, de la série de Fourier. Donner les coefficients avec indices paires et impaires.
   (c) En conclure la décroissance des coefficients pour $k \to \infty$.
   (d) Donner la somme de la série pour $x = 0$. En conclure que
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. *Équation de Schrödinger* (8) :
   L'équation de Schrödinger dans le vide prend la forme
   $$i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \psi \in \mathbb{C}.$$
   (a) Donner les conditions aux limites $x = \pm\pi$ pour assurer une solution périodique sur tout $\mathbb{R}$. En utilisant des séries de Fourier, donner la solution du problème de Cauchy pour les conditions initiales $\psi(x, 0) = f(x)$ où $f(x) = f(x + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (b) Écrire un code en Matlab pour résoudre l'équation de Schrödinger dans le vide pour la condition initiales $\psi_0(x) = \exp(-10x^2)$ avec $x \in [-\pi, \pi]$ avec *fft*. Prendre $N = 32$ modes de Fourier et $N_t = 100$ pas dans le temps pour $t \in [0, 1]$. Visualiser la valeur absolue de la solution.

3. *Stabilité* : (4)
Pour l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$, la méthode d'Euler explicite prend la forme

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)),$$

où on applique la discrétisation $t = t_0, t_1, t_2, \ldots$ et où $t_{n+1} - t_n = h$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. La méthode d'Euler implicite est donnée par

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_{n+1}, y(t_{n+1})).$$

Donner les domaines de stabilité. Une des méthodes est-elle A-stable ?
Indication : Étudier l'équation $y'(t) = \lambda y(t)$, où la constante $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\Re\lambda < 0$. Discuter le domaine de stabilité dans le plan complexe de $z = h\lambda$.