L3 PC

Université de Bourgogne

Examen de Méthodes Mathématiques II - Mai 2018

Durée : 2h. Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés.

Exercice I

1) Montrer que $\mathcal{F}_\nu[f'(t)] = 2i\pi\nu\mathcal{F}_\nu[f(t)]$, où $f'(t)$ désigne la fonction dérivée de $f(t)$ et $\mathcal{F}_\nu[f(t)]$ la transformée de Fourier de $f(t)$ en variable ν, c'est-à-dire $\mathcal{F}_\nu[f(t)] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt$.

2) Montrer que $\mathcal{F}'_\nu[f(t)] = -2i\pi\mathcal{F}_\nu[tf(t)]$, où $\mathcal{F}'_\nu[f(t)]$ désigne la fonction dérivée de $\mathcal{F}_\nu[f(t)]$, c'est-à-dire $\mathcal{F}'_\nu[f(t)] \equiv \frac{d\mathcal{F}_\nu[f(t)]}{d\nu}$.

3) Appliquer ces deux propriétés pour la fonction Gaussienne $f(t) = e^{-\pi t^2}$ et en déduire l'équation différentielle satisfaite par $\mathcal{F}_\nu[f(t)]$.

4) Résoudre cette équation, sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}dt = 1$, et en déduire la transformée de Fourier de $e^{-\pi t^2}$.

Exercice II

a) Calculer la transformée de Fourier de $\exp(2i\pi\nu_0 x)$ et de $\cos(2\pi\nu_0 x)$.
b) Calculer la transformée de Fourier de $\delta(x - x_0)$.
c) Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte $\Pi(x)$.
d) En déduire la transformée de Fourier de $x\Pi(x)$.

Exercice III

a) Calculer l'intégrale

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ik(x-\alpha)}}{k_0^2 - k^2} \qquad (1)$$

avec α un nombre réel, où $\mathcal{P}$ indique la partie principale de Cauchy.
Pourquoi utilise-t'on la partie principale de Cauchy ?
Remarque : on considérera les deux cas $x > \alpha$ et $x < \alpha$.

b) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2G(x)}{dx^2} + \omega^2 G(x) = \delta(x - \alpha). \qquad (2)$$

On utilisera la transformée de Fourier de l'équation (ainsi que le résultat des exercices IIb et IIIa).

Rappels. Définition de la distribution porte :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } |x| < 1/2 \\ 0 \text{ pour } |x| > 1/2 \end{cases} \qquad (3)$$

1/1