Université de Bourgogne
L2 + L3 Maths

Année 2017-2018
14 mai

## Examen de Géométrie.

### Exercice 1.

Soit $ABCD$ un tétraèdre dans l'espace affine de dimension 3.

1. On se place dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
   (a) Donner les équations cartésiennes des quatre plans constituant les faces du tétraèdre. On ne justifiera l'équation que pour l'un d'entre eux.
   (b) Donner les équations cartésiennes des six plans déterminés par une arête et le milieu de l'arête opposée. On ne justifiera l'équation que pour l'un d'entre eux.
   (c) Montrer que les six derniers plans ont un point commun $O$ dont on donnera les coordonnées cartésiennes.
2. On se place dans le repère affine $(A, B, C, D)$.
   (a) Pour l'un des plans de la question 1.a. exprimer en termes de barycentres l'appartenance d'un point $M$ à ce plan.
   (b) Pour l'un des plans de la question 1.b. exprimer en termes de barycentres l'appartenance d'un point $M$ à ce plan.
   (c) Exprimer le point $O$ comme barycentre des points $A$, $B$, $C$ et $D$.

### Exercice 2.

1. Le but est de démontrer le théorème de Menelaüs en utilisant les homothéties-translations. Soit $ABC$ un triangle ($A, B, C$ non alignés) dans un plan affine, $A', B', C'$ des points respectivement de $(BC)$, $(AC)$ et $(BA)$ distincts de A,B,C.

   Les points $A', B', C'$ sont alignés si et seulement si (*) $\quad \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$

   On considère les homothéties $h_1$ de centre $A'$ envoyant $B$ sur $C$, $h_2$ de centre $B'$ envoyant $C$ sur $A$, $h_3$ de centre $C'$ envoyant $A$ sur $B$, et la composée $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$.
   (a) Montrer que si $A', B', C'$ sont alignés, alors $h$ est l'identité. En déduire le sens direct.
   (b) Démontrer la réciproque en utilisant $h$.
2. Soient $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$ quatre droites qui s'intersectent deux à deux. On note

   $$\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \{A\} \quad \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_3 = \{B\} \quad \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_4 = \{C\}$$
   $$\mathscr{D}_2 \cap \mathscr{D}_3 = \{F\} \quad \mathscr{D}_2 \cap \mathscr{D}_4 = \{D\} \quad \mathscr{D}_3 \cap \mathscr{D}_4 = \{E\}$$

   On note $P$ le milieu de $[AE]$, $Q$ le milieu de $[BD]$ et $R$ le milieu $[FC]$. On note aussi $a$ le milieu de $[BF]$, $b$ le milieu de $[AF]$ et $f$ le milieu $[AB]$. En utilisant le théorème de Menelaüs et de Thalès, on veut montrer que $P$, $Q$ et $R$ sont alignés.
   (a) Montrer que le point $P$ appartient à la droite $(bf)$ et montrer que

   $$\frac{\overline{Pb}}{\overline{Pf}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EB}}.$$

   (b) En utilisant un raisonnement analogue à la question précédente pour les points $Q$ et $R$ exprimer des égalités de rapport entre $\overline{Qf}$, $\overline{Qa}$, $\overline{DA}$, $\overline{DF}$ et $\overline{Ra}$, $\overline{Rb}$, $\overline{CB}$, $\overline{CA}$
   (c) Conclure.

**Exercice 3.**

On identifie $\mathbb{C}$ au plan affine euclidien. On considère les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies pour tout $z \in \mathbb{C}$ par les expressions suivantes :

$$f_1(z) = a_1 z + b_1, \qquad f_2(z) = a_2 z + b_2, \qquad f_3(z) = a_3 \bar{z} + b_3.$$

où les $a_i$ et les $b_i$ $(i = 1, \ldots, 3)$ sont des nombres complexes fixés.

1. (a) Donner une condition sur $a_1$ pour que $f_1$ soit une isométrie.
   (b) Donner un condition sur $a_1$ pour que $f_1$ soit une homothétie. Déterminer son centre.
   (c) Donner une condition sur $a_1$ pour que $f_1$ soit une rotation. Déterminer son centre.
   (d) Donner une condition sur $a_1$ pour que $f_1$ soit une translation.
   (e) Peut-on écrire dans tous les cas $f_1$ comme la composée d'une isométrie et d'une homothétie ?
2. (a) Donner une condition sur $a_3$ pour que $f_3$ soit une isométrie.
   (b) Dans le cas où $b_3 = 0$ et $f_3$ est une isométrie, décrire l'ensemble des points fixes en fonctions de $a_3$
   (c) Dans le cas général où $f_3$ est une isométrie, décrire l'ensemble des points fixes en fonctions de $a_3$ et $b_3$. Comment s'appelle cette transformation ?
3. (a) Si $f_1$ et $f_2$ sont des homothéties, discuter en fonction des données, quelles sont les possibilités pour leur composé.
   (b) Si $f_1$ et $f_2$ sont des rotations, est ce que la composée peut être une translation ? Si oui donner une condition sur $a_1$ et $a_2$.
   (c) Si $f_1$, $f_2$ et leur composée $f$ sont des rotations, donner le centre de la composée $f$ en fonction des centres de $f_1$ et $f_2$.
   (d) Dans la situation de la question précédente, décrire géométriquement comment construire le centre de $f$.
4. (a) Est ce que $f_1$ conserve toujours les distances ? Les angles orientés ?
   (b) Est ce que $f_3$ conserve toujours les distances ? Les angles orientés ?