Université de Bourgogne
L2 MaPC31 2017/18

Examen

19 décembre 2017 ; durée : 2 h

Ex 1. Question de cours.

a) Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Donner la définition d'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differentiable au point $x \in D$.

b) Donner la définition de ∇f

c) Soit f deux fois différentiable. Donner la définition du laplacien de f.

Ex 2. Calculer le gradient de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(x) = \langle x \wedge (x \wedge a), a \rangle$$

où $a \in \mathbb{R}^3$

Ex 3. Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{aligned} x_1 =& \varphi_1(u, v) = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ x_2 =& \varphi_2(u, v) = -\frac{v}{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

a) Calculer la matrice de Jacobi $d\varphi$ de cette application

b) Calculer le jacobien de cette application, trouver tous les points (u, v) où φ n'est pas localement inversible.

c) Soit

$$f \circ \varphi = \frac{1}{u^2 + v^2},$$

calculer $(\nabla f) \circ \varphi$

Ex 4. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(x, y) = x^2 y^2 - 5x^2 y + 4x^2 - y^3 + 12y,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle

Ex 5. Soit D la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x^2; \quad y = 2x - x^2$$

a) Trouver l'air de D

b) Calculer les coordonnées du centre de gravité de D.