Examen Licence 2 - Info4c - Durée 2H

Université de Bourgogne - 2017-2018

Tous les documents sont autorisés

Partie I (8pts)

Exercice 1 (5pts): Trouver une forme close et la série génératrice pour les suites :

- $a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2}$ pour $n > 1$, et $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$;
- $c_n = 4 \cdot c_{n-1} - 1$ pour $n > 0$, et $c_0 = 1$.

Exercice 2 (3pts): Donner le nombre de fonctions $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ ayant la propriété que $f(i) \leq f(j)$ pour tout i et j, $0 \leq i < j \leq k$, dans les deux cas suivants:

A. $k = 4$ et $n = 1$;

B. $k = 6$ et $n = 7$.

Partie II (12pts)

Exercice 3 (3pts): Une relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est donnée par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2$ est divisible par 3. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Expliciter toutes les classes d'équivalences. En déduire l'ensemble quotient.

Exercice 4 (6pts): Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties non vides de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Si A est une partie non vide de $[n]$, son plus grand élément est noté $max(A)$ est son plus petit élément est noté $min(A)$. On définit la relation binaire suivante sur $\mathcal{P}_n$: si A et B sont deux éléments de $\mathcal{P}_n$,

$$A \leq B \Longleftrightarrow A = B \text{ ou } max(A) \leq min(B) \text{ si } A \neq B.$$

1. Que peut-on dire de A lorsque $max(A) = min(A)$?
2. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}_n$.
3. Dessiner les diagrammes de Hasse pour $n = 2, 3$ et 4.
4. Pour n quelconque, l'ensemble $\mathcal{P}_n$ muni de la relation $\leq$ a-t-il un plus petit ou plus grand élément?

5. Est-ce que $\mathcal{P}_n$ est un treillis? Pourquoi?
6. Est-ce un treillis distributif? Pourquoi?

Exercice 5 (3pts): Donner la forme normale disjonctive de la fonction booléenne d'arité quatre suivante:

$$f(a,b,c,d) = (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d}) \wedge (\bar{a} \vee d).$$