CE - Physique statistique - Seconde session 2018

Question 1 – Modèle d'Einstein de la chaleur spécifique (12 pts)

On se place dans les hypothèses de la mécanique quantique. Dans le modèle d'Einstein des vibrations d'un solide, tous les atomes vibrent dans un potentiel harmonique avec une fréquence moyenne que l'on notera ω_E. L'énergie par atome du solide est donc décrite par l'équation suivante :

$$E = 3\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_E \quad (1)$$

où n est le nombre de quanta.

Données numériques, $\omega_E = 10^{13}$ rad/s et $\hbar = 1{,}054\,571\,800\ 10^{-34}$ Js/rad.
Pour rappel, 1 $eV = 1.602176565\ 10^{-19}$ J, la constante de Boltzmann est $k = 1.38064852\ 10^{-23}$ J/K.

En utilisant le modèle d'Einstein (équation (1)), répondez aux questions suivantes :

a) donnez la formule permettant de calculer l'énergie moyenne du solide dans l'ensemble NVT à l'équilibre thermique,
b) calculez l'énergie moyenne $\langle E\rangle$ par atome à T=77 K et T=300 K,
c) comparez les valeurs obtenues pour l'énergie moyenne par atome en b) avec les valeurs calculées dans une hypothèse classique,
d) démontrez l'expression de la chaleur spécifique à volume constant C_V par atome,
e) montrez qu'à hautes températures, C_V tend vers une constante (résultat classique), calculez C_V par atome à T=77 K et T=300 K et comparez à la valeur limite de C_V à hautes températures (point d).

Question 2 – Statistique des photons (8 pts)

On se place dans l'ensemble canonique (N,V,T). La population moyenne d'un microétat individuel d'un gaz de N (quasi)particules sans interactions dans un volume V est donnée par la relation suivante :

$$\langle n_i\rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i}Ln[Z] \quad (1)$$

où n_i est le nombre de (quasi)particules occupant le micro-état i, ε_i est l'énergie du microétat i individuel, $\beta = 1/kT$ où T est la température et Z la fonction de partition.
En utilisant l'équation (1), démontrez que pour un gaz de PHOTONS à l'équilibre thermique, la population moyenne d'un état individuel est donnée par la statistique suivante :

$$f = \frac{1}{\exp[\beta\varepsilon]-1} \quad (2)$$

où $\varepsilon = h\nu$, h est la constante de Planck, et ν la fréquence des ondes électromagnétiques.