PENDULE DOUBLE PLAN DISQUE/TRIANGLE

(Aucun document autorisé - Calculatrice non autorisée)

On considère un système mécanique en mouvement dans l'espace rapporté au repère orthonormé et galiléen $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Ce système est formé par l'assemblage de deux systèmes, rigides et homogènes, articulés entre eux et astreint à évoluer dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$. On suppose l'existence d'un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = g\,\vec{x}$.

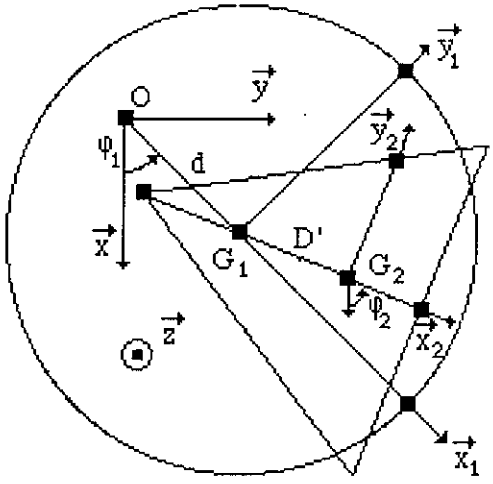
Le premier système est un disque S_1 peu épais de rayon a dont $R_1 = (G_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z})$ est le repère lié (de base b_1), G_1 désignant son centre de masse. On note : $\varphi_1 = (\vec{x}, \vec{x_1})$. Il est en rotation sur un bâti fixe (dont R est le repère lié) autour de l'axe $(O, \vec{z})$ de telle sorte que : $\overrightarrow{OG_1} = d\,\vec{x_1} = (a/2)\,\vec{x_1}$. La liaison entre le bâti fixe et S_1 est une liaison rotoïde d'axe $(O, \vec{z})$ supposée parfaite. Le système S_1 est schématisé par un disque sans épaisseur dont μ_1 est la répartition surfacique de masse et m la masse. On donne la matrice d'inertie du disque :

$$\left[J_{G_1}(S_1)\right]^{b_1} = \frac{m\,a^2}{4}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Le second système est un triangle équilatéral S_2 peu épais de côté 2a dont $R_2 = (G_2, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z})$ est le repère lié (de base b_2), G_2 désignant son centre de masse. On note : $\varphi_2 = (\vec{x}, \vec{x_2})$. Il est en rotation sur le disque autour de l'axe $(G_1, \vec{z})$ de telle sorte que : $\overrightarrow{G_1G_2} = D'\,\vec{x_2} = a\,\vec{x_2}$. La liaison entre le disque et S_2 est une liaison rotoïde d'axe $(G_1, \vec{z})$ supposée parfaite. Le système S_2 est schématisé par un triangle sans épaisseur dont μ_2 est la répartition surfacique de masse et m/4 la masse. On donne la matrice d'inertie du triangle :

$$\left[J_{G_2}(S_2)\right]^{b_2} = \frac{m\,a^2}{24}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

On définit le système S comme étant la réunion des systèmes S_1 et S_2.



1. CINEMATIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

1.1. Donner l'expression des éléments de réduction du torseur cinématique de S_1 par rapport à R en O et G_1.

1.2. Donner l'expression des éléments de réduction du torseur cinématique de S_2 par rapport à R en G_2.

2. CINETIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

2.1. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 et O du torseur cinétique par rapport à R du solide S_1.

2.2. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 et O du torseur cinétique par rapport à R du solide S_2.

2.3. Donner l'expression des éléments de réduction en O du torseur cinétique par rapport à R du système S.

2.4. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 et O du torseur dynamique par rapport à R du solide S_1.

2.5. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 et O du torseur dynamique par rapport à R du solide S_2.

2.6. Donner l'expression des éléments de réduction en O du torseur dynamique par rapport à R du système S.

3. DYNAMIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

3.1. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en O des torseurs des efforts extérieurs qui s'exercent sur S_1.

3.2. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en G_1 des torseurs des efforts extérieurs qui s'exercent sur S_2.

3.3. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en O des torseurs des efforts extérieurs qui s'exercent sur S.

3.4. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S_1 (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).

3.5. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S_2 (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).

3.6. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).

3.7. Donner l'expression des composantes des torseurs schématisant les sollicitations, en fonction des paramètres associés aux degrés de libertés des systèmes (c'est-à-dire en fonction de φ_1, φ_2 et de leurs dérivées).

3.8. Montrer que les équations du mouvement se ramène au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{8}\,\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2-\varphi_1) + \frac{1}{3}\,\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{8}\,\dot{\varphi}_1^{\,2} \sin(\varphi_2-\varphi_1) + \frac{g}{4a}\sin\varphi_2 = 0 \\ \frac{13}{2}\,\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2-\varphi_1) - \dot{\varphi}_2^{\,2}\sin(\varphi_2-\varphi_1) + \frac{5\,g}{a}\sin\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

4. ETUDE D'UN MOUVEMENT PARTICULIER

4.1. On peut montrer que la configuration d'équilibre stable est la position (P_1) définie par : $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$. On étudie désormais des mouvements voisins de cette position. Linéariser les équations générales et montrer qu'en posant : $\varphi_1 = 0 + \varepsilon_1$, $\varphi_2 = 0 + \varepsilon_2$, où les paramètres ε_1 et ε_2 sont astreints à rester petits ainsi que leur dérivée, alors les équations du mouvements s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon}_1 + \frac{8}{3}\,\ddot{\varepsilon}_2 + \frac{2\,g}{a}\,\varepsilon_2 = 0 \\ \frac{13}{2}\,\ddot{\varepsilon}_1 + \ddot{\varepsilon}_2 + \frac{5\,g}{a}\,\varepsilon_1 = 0 \end{cases}$$

4.2. On donne les conditions initiales suivantes au mouvement du système :

$$\varphi_1(t=0) = \varphi_1^0,\ \dot{\varphi}_1(t=0) = \dot{\varphi}_1^0,\ \varphi_2(t=0) = \varphi_2^0,\ \dot{\varphi}_2(t=0) = \dot{\varphi}_2^0$$

Touver les évolutions de ε_1 et ε_2 en fonction du temps.