L3 SPI Méca - Méca des milieux continus 1

PLAQUE MINCE ENCASTREE SOUMISE A LA PESANTEUR

Soit un repère cartésien orthonormé $R = (O_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ où $x = (x_i)_{i = 1, 2, 3}$ est la position d'un point M. On considère une plaque trouée Ω mince et circulaire de rayon extérieur b et de rayon intérieur a. L'axe perpendiculaire à son plan est l'axe x_3. La surface latérale extérieure est appelée Σ_2. La surface latérale intérieure est appelée Σ_3. Cette plaque est limitée en hauteur par Σ_0 située à $x_3 = 0$ et par Σ_1 située à $x_3 = e$. On note O le centre d'inertie de la section courante Σ dont l'aire est S. Les points O_0 et O_1 sont les centres d'inertie des sections Σ_0 et Σ_1 et le repère R est principal d'inertie.

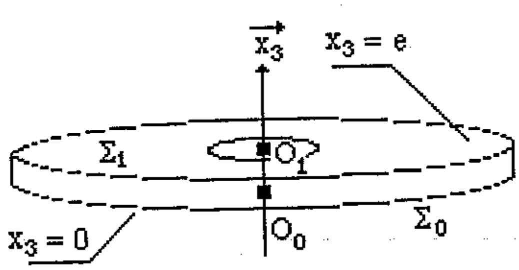
En tout point M de Σ, on définit le repère local en coordonnées cylindriques (r, φ, x_3) par :

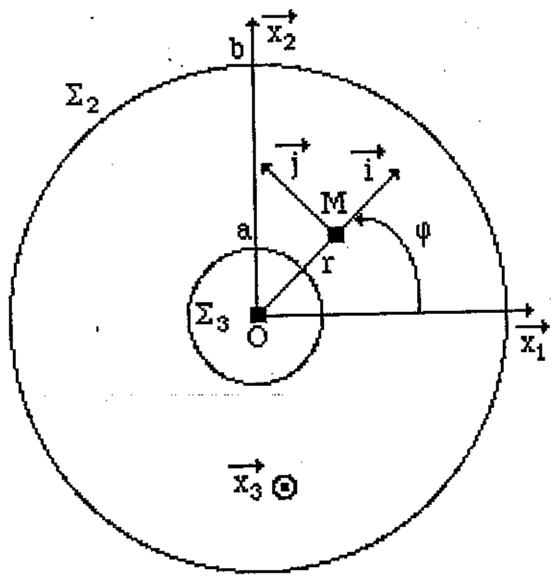
$$R_c = (O_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{x}_3) \text{ avec } r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ et } \begin{cases} \vec{i} = \cos\varphi\, \vec{x}_1 + \sin\varphi\, \vec{x}_2 \\ \vec{j} = -\sin\varphi\, \vec{x}_1 + \cos\varphi\, \vec{x}_2 \end{cases}$$

On suppose que le domaine est constitué d'un matériau élastique linéaire homogène isotrope dont ρ désigne la masse volumique, E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson et (λ, μ) les coefficients de Lamé.

On se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. On suppose que le domaine est en équilibre quasi-statique sous les conditions suivantes :

- une densité volumique d'effort $-\rho g \vec{x}_3$ est induite par le champ de pesanteur ;
- la surface Σ_0 est libre d'effort ;
- la surface Σ_1 est libre d'effort ;
- la surface Σ_2 est encastrée dans un bâti fixe ;
- la surface Σ_3 est encastrée dans un bâti fixe.





1. Dans le repère R_c, écrire les équations du problème (P) à résoudre.
2. Le problème ainsi posé rentre-t-il dans le cadre des problèmes généraux d'élasticité ? Discuter l'existence et l'unicité des solutions.
3. Justifier pourquoi les solutions sont indépendantes de la variable φ.
4. On suppose que le déplacement à la forme suivante :
$$\vec{u} = u_r(r)\,\vec{i} + u_3(r)\,\vec{x_3}$$
Que doit vérifier ce champ pour avoir la possibilité d'être solution du problème posé ? On explicitera très précisément les équations et conditions que cela impose à u_r et u_3.
5. En déduire la forme de u_r et u_3.
6. En déduire la forme des composantes du tenseur des contraintes (exprimées dans R_c).
7. Le champ de déplacement intuité est-il finalement solution du problème ?

FORMULAIRE

Equations d'équilibre dans le repère cylindrique

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial x_3} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho f_r = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi 3}}{\partial x_3} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + \rho f_\varphi = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi 3}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{\sigma_{r3}}{r} + \rho f_3 = 0$$

Tenseur des déformations dans le repère cylindrique

$$\varepsilon(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \varepsilon_{r\varphi} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \dfrac{u_\varphi}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right) & \varepsilon_{r3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial r}\right) \\ -\text{SYMETRIE}- & \varepsilon_{\varphi\varphi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{u_r}{r} & \varepsilon_{\varphi 3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_3}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial x_3}\right) \\ & & \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Loi de Hooke

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}(\sigma)\,I \Leftrightarrow \sigma = \lambda\,\mathrm{tr}\{\varepsilon(\vec{u})\}\,I + 2\mu\,\varepsilon(\vec{u})$$

Solution d'équations différentielles simples (C_0 et C_1 sont des constantes)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dx(t)}{dt} = 0 \Rightarrow x(t) = C_1 \ln x + C_0$$
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dx(t)}{dt} - \frac{K\,x(t)}{t^2} = 0\ (K>0) \Rightarrow x(t) = C_1 e^{-\sqrt{K}\ln t} + C_0 e^{\sqrt{K}\ln t}$$
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dx(t)}{dt} - \frac{K\,x(t)}{t^2} = 0\ (K<0) \Rightarrow x(t) = C_1 \cos(\sqrt{-K}\ln t) + C_0 \sin(\sqrt{-K}\ln t)$$