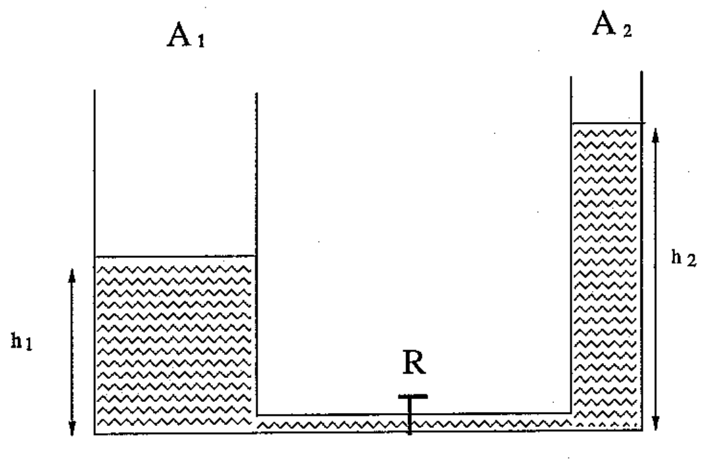
Examen de Mécanique des fluides - Session 1

22 Mai 2018 – durée : 2 heures

formulaire mathématique autorisé

I. Deux vases A_1 et A_2 (ouverts à la pression atmosphérique) de sections $S_1 = 50\ cm^2$ et $S_2 = 10\ cm^2$, dont les bases sont dans un même plan horizontal, communiquent par un tube fin de volume négligeable muni d'un robinet R initialement fermé.

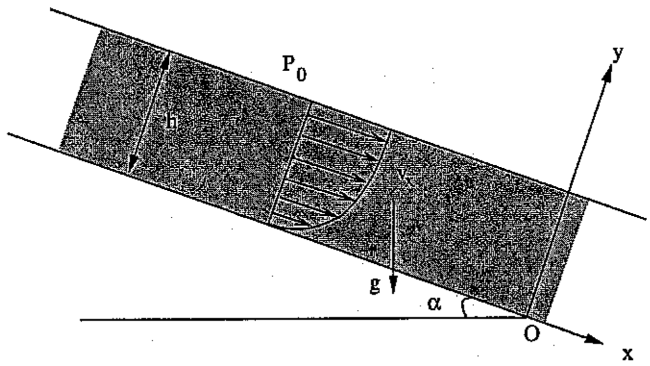
1. On verse 1 litre de mercure dans le vase A_1 et 0,5 litre de mercure dans le vase A_2. Quelles sont les hauteurs h_1 et h_2 du mercure dans les vases ?
2. Que se passe t'il quand on ouvre le robinet ? Justifier votre réponse et faire un schéma. On note x_1 et x_2 les déplacements des deux niveaux de mercure dans les vases A_1 et A_2. Déterminer x_1 et x_2 (indication : écrire l'équation liant x_1 à x_2 puis l'équation liant x_1 et h_1 à x_2 et h_2).
3. On verse ensuite 1,5 litres d'alcool dans le vase A_1 (le robinet est toujours ouvert et le mercure versé à la question 1 est toujours présent). On note y_1 et y_2 les déplacements des surfaces du mercure et H_1 la hauteur de la colonne d'alcool. A l'équilibre :
   — faire un schéma représentant les fluides et les différentes cotes : H_1, h_1, h_2, x_1, x_2, y_1 et y_2. Calculer H_1.
   — déterminer le déplacement y_2 du mercure dans le vase A_2,



Applications Numériques : $\rho_{alcool} = 0.79\ \ kg.m^{-3}$, $\rho_{Hg} = 13.6\ \ kg.m^{-3}$

II. Écoulement avec surface libre

On considère l'écoulement plan stationnaire d'un fluide visqueux incompressible sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Le fluide est soumis aux seules forces de pesanteur ($\vec{g}$: vertical descendant). L'écoulement est dirigé suivant l'axe $O\vec{x}$, et on choisit l'axe $O\vec{y}$ perpendiculaire à $O\vec{x}$ (voir figure ci-dessous). On note h l'épaisseur constante de l'écoulement, et P_0 la pression atmosphérique à la surface libre.



1. En supposant que le champ des vitesses est de la forme : $\vec{V} = V_x\,\vec{e}_x$ $(V_y = 0)$, montrer que la composante V_x ne dépend que de y. En déduire l'expression des équations de Navier-Stokes sur les axes Ox et Oy (indication : écrire $\vec{g}$ dans le repère Oxy).
2. Montrer que la pression $p(x, y)$ a pour expression :

$$p(y) = (h - y)K_1 + K_2$$

   où K_1 et K_2 sont des constantes à préciser.
3. Écrire la première équation de Navier Stokes (projection sur l'axe x). En déduire l'équation différentielle du second ordre qui permet de déterminer la vitesse V_x.
4. Déterminer l'expression de $V_x(y)$.
5. On donne la condition limite à la surface libre $(y = h)$: $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial y} = 0$.

   En précisant la condition limite à la paroi $(y = 0)$, déduire l'expression du champ des vitesses en fonction de ρ, g, α, h, y et μ.
6. En déduire la forme du profil et dire comment varie la vitesse en fonction de la viscosité (sans faire de calcul).
7. Calculer la vitesse moyenne V_m.

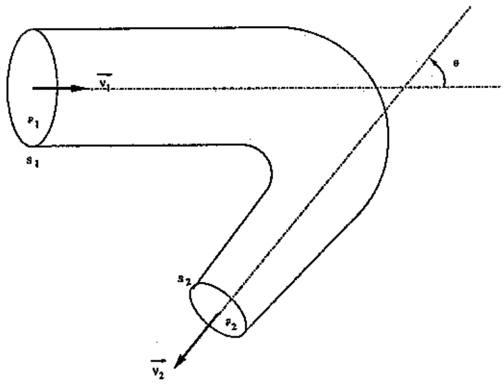
Formulaire :

Équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible dans le champ de pesanteur :

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{grad}\,p + \mu\vec{\Delta}\vec{V} + \rho\vec{g}$$

avec : $\vec{\Delta}\vec{V} = \Delta V_x\vec{e}_x + \Delta V_y\vec{e}_y$ et $\Delta f(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en deux dimensions.

III. Soit une conduite coudée dans laquelle circule un écoulement permanent de fluide parfait incompressible. On suppose que la pression statique est constante dans les sections droites S_1 et S_2 et que la section S_2 est ouverte à la pression atmosphérique.



Connaissant le débit volumique Q_v déterminez la résultante $\vec{F}$ des actions exercées par l'eau sur le coude (on prendra $\alpha = 90°$)