L3 Physique - PFA -

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
EXAMEN DE MÉTHODES MATHÉMATIQUES - JANVIER 2018
Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.

Exercice I. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec α et β réels.
a) Ces matrices sont-elle symétriques ?
b) Calculer les valeurs propres a_i et les vecteurs propres (normés) correspondants $|u_i\rangle$ de la matrice A en précisant le degré de dégénérescence pour chaque valeur propre.
c) Vérifier le théorème de décomposition spectrale :

$$A = \sum_{i=1}^{3} a_i |u_i\rangle\langle u_i|. \tag{2}$$

d) Calculer alors e^{iAt} (avec t réel et i le nombre imaginaire $i^2 = -1$) en utilisant le théorème spectral :

$$f(A) = \sum_{i=1}^{3} f(a_i)|u_i\rangle\langle u_i|, \tag{3}$$

où $f(.)$ est une fonction.
e) Calculer le commutateur $AB - BA$. Pour quelles valeurs de α et β est-il 0 : $AB - BA = 0$?
<u>On se limitera à cette situation $AB - BA = 0$ par la suite.</u>

f) On définit $|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que le vecteur $|w\rangle = \gamma|v_1\rangle + \delta|v_2\rangle$ est vecteur propre de A pour tout γ et δ.
Pourquoi ?
g) Déterminer les vecteurs qui sont simultanément vecteurs propres de A et B.

Exercice II
a) Résoudre l'équation différentielle réelle (scalaire), où $x \equiv x(t)$ et a une constante réelle :

$$x' - iax = 0. \tag{4}$$

Ecrire la solution pour la condition initiale $x(0) = 1$.
b) Montrer que la solution de l'équation différentielle matricielle

$$\frac{d}{dt}|u(t)\rangle - iA|u(t)\rangle = 0, \tag{5}$$

où A est une matrice, a la même forme que la solution scalaire ci-dessus.
Indication : on vérifiera la solution en la reportant dans l'équation (5).

c) Calculer la solution avec A la matrice de l'équation (1) et la condition initiale $|u(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On utilisera le résultat de l'exercice Id).

Exercice III
On étudie l'équation différentielle de Bessel, avec $y \equiv y(x)$ et n une constante,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{6}$$

par la méthode de Frobenius via une solution de la forme $y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell x^{k+\ell}$.

1. Déterminer et résoudre l'équation indicielle en fonction de n.
2. Montrer que la relation de récurrence entre $a_{\ell+2}$ et a_ℓ a deux formes possibles :

$$a_{\ell+2} = -\frac{1}{(\ell+2)(\ell+2+2n)} a_\ell, \qquad a_{\ell+2} = -\frac{1}{(\ell+2)(\ell+2-2n)} a_\ell. \tag{7}$$

   On s'intéresse par la suite au cas $\underline{n=0}$.

3. Montrer que la relation de récurrence entre $a_{\ell+2}$ et a_ℓ prend alors une forme unique.
   En déduire que la solution s'écrit par le développement en série (à une constante multiplicative près) :

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \tag{8}$$

   On l'appelle *fonction de Bessel d'ordre 0*, notée $J_0(x)$.

4. Vérifier la convergence de la série.