L3 PC + PFA - Physique quantique 2

Ex. 1 :
On considère un système à deux niveaux d'Hamiltonien H représenté dans la base canonique $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ par la matrice :

$$H = \hbar \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la dimension des paramètres A et B ?
2. Montrer que les paramètres A et B sont des paramètres réels.
3. Calculer les valeurs propres de H.
4. Montrer que les vecteurs propres de H peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\begin{cases} |\chi_+\rangle = \cos(\theta/2)|+\rangle + \sin(\theta/2)|-\rangle \\ |\chi_-\rangle = -\sin(\theta/2)|+\rangle + \cos(\theta/2)|-\rangle. \end{cases}$$

   On donnera l'expression de θ en fonction de A et B.
5. Le vecteur d'état $|\phi(t)\rangle$ peut se décomposer sur la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ sous la forme :

$$|\phi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle.$$

   Ecrire le système d'équations différentielles couplées auxquelles obéissent les composantes $c_+(t)$ et $c_-(t)$.
6. En déduire que c_+ et c_- vérifient la même équation différentielle :

$$\ddot{c}_\pm + (\frac{\Omega}{2})^2 c_\pm = 0.$$

   On donnera l'expression de Ω en fonction de A et B. Quelle est l'interprétation physique de Ω ?
7. On décompose $|\phi(t=0)\rangle$ sur la base $\{|\chi_+\rangle, |\chi_-\rangle\}$:

$$|\phi(t=0)\rangle = \lambda|\chi_+\rangle + \mu|\chi_-\rangle.$$

   Montrer que c_+ peut s'écrire sous la forme :

$$c_+(t) = \lambda e^{-i\Omega t/2}\cos(\theta/2) - \mu e^{i\Omega t/2}\sin(\theta/2).$$

8. On suppose que $c_+(0) = 0$. En déduire λ, μ et $c_+(t)$ à une phase près.
9. Montrer que la probabilité de trouver le système au temps t dans l'état $|+\rangle$ est :

$$p_+(t) = \frac{B^2}{A^2 + B^2}\sin^2(\frac{\Omega t}{2}).$$

Ex. 2 :
On considère une particule de spin S plongée dans un champ magnétique homogène et uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On note $\vec{S}$ l'opérateur de spin de la particule et $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$ l'opérateur moment magnétique associé. On pose $\omega = -\gamma B$.

1. Ecrire l'Hamiltonian H du problème
2. Quelles sont pour un Hamiltonien quelconque les équations de Schrödinger vérifiées par le ket $|\psi\rangle$, la fonction d'onde du système, et le bra associé $\langle\psi|$.
3. En déduire le théorème d'Ehrenfest :
$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|[A,H]|\psi\rangle,$$
où A est une observable quelconque indépendante du temps.
4. Montrer la relation suivante :
$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z.$$
5. Montrer que les valeurs moyennes des composantes de l'opérateur de spin $\vec{S}$ vérifient :
$$\begin{cases} \langle\dot{S_x}\rangle = -\omega\langle S_y\rangle \\ \langle\dot{S_y}\rangle = \omega\langle S_x\rangle \\ \langle\dot{S_z}\rangle = 0 \end{cases}$$
6. Déterminer l'évolution dans le temps des 3 composantes $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ et $\langle S_z\rangle$. La condition initiale à $t = 0$ est donnée par :
$$\langle\vec{S}\rangle(0) = (S_{x0}, S_{y0}, S_{z0}).$$
7. Montrer que le mouvement de $\langle\vec{S}\rangle$ est un mouvement de précession autour de l'axe z. Quel est le temps nécessaire T_0 pour que le spin fasse un tour ? On dessinera schématiquement la trajectoire suivie par $\langle\vec{S}\rangle$.
8. Montrer que le moment cinétique classique $\vec{J}$ associé à un moment magnétique classique $\vec{\mu}$ a le même mouvement de précession. On utilisera pour cela le théorème du moment cinétique. On rappelle également que $\vec{\mu} = \gamma\vec{J}$. Quelle est la période classique d'oscillation ?
9. On décompose $|\psi(t)\rangle$ sur la base propre $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de S_z :
$$|\psi(t)\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle.$$
Quelle est l'évolution temporelle des coefficients c_+ et c_- ?
10. Comparer la valeur du vecteur d'état au bout d'une période T_0, $|\psi(T_0)\rangle$, et la valeur initiale $|\psi(0)\rangle$.
11. Envisager une mise en évidence expérimentale de ce résultat.