L3 maths - Probabilités discrètes

-Probabilités, Université de Bourgogne

19 décembre, 2017

Exercice 1 Dans le tableau suivant, on donne les résultats d'une enquête réalisée dans un magasin d'outillage pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de perceuse en fonction de son prix de vente.

prix de vente en euros : x_i	50	60	70	80	90	100
nombre potentiel d'acheteurs :y_i	140	120	100	95	85	70

Utilisant les données dans l'indication suivante :
(1). Calculer $\bar{x}, \bar{y}, \sigma_x, \sigma_y$.
(2). Calculer le coefficient de corrélation ρ entre x et y.
(3). Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x, tracer le nuage de point et la droite de régression.
(4). On désigne par $r(x)$ la recette correspondant à la vente du modèle de perceuses étudié au prix x. En utilisant l'équation de régression, donner une estimation de $r(x)$ en fonction de x. Montrer que $r(x)$ admet un unique maximum que l'on déterminera. À combien peut-on estimer le prix de vente correspondant à une recette maximale ?

Indication : $\sum_{i=1}^{6} x_i = 450$, $\sum_{i=1}^{6} y_i = 610$, $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 35500$, $\sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 65150$, $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 43450$.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
(1). On suppose que X est intégrable, montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X > n\})$.
(2). On suppose que X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0,1[$: $\mathbb{P}(\{X = k\}) = q^{k-1}p$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et $q = 1 - p$. Montrer que sa fonction génératrice $G_X(s)$ admet l'expression suivante

$$G_X(s) = \frac{sp}{1 - qs},$$

où $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k)$. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance σ_X^2 de X.
(3). Retrouver $\mathbb{E}(X)$ en utilisant la formula de (1), lorsque X suit $\mathcal{G}(p)$.
(4). Soit Y une variable aléatoire continue réelle qui suit la loi exponentiel $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire de densité $k(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(x \geq 0)}$. On pose $Z = [Y] + 1$, où $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x. Montrer que Z suit une loi géométrique de paramètre p. Que vaut p ?

Exercice 3 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\} \times \mathbb{N}^*$ dont la loi conjointe est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = k) = \frac{2^k - 1}{4^k}, \quad \mathbb{P}(X = 1, Y = k) = \frac{1}{4^k}, \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}^*.$$

(1). Déterminer les lois de X et de Y.
(2). On pose $S = X + Y$ et $T = XY + 1$. Déterminer les lois de S et de T.
(3). Calculer $\mathbb{P}(S = T)$.