Licence de Mathématiques

2017-2018
Intitulé de l'enseignement : Théorie des Probabilités
Année : L3
Date : 23 mai 2018

Examen terminal

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : On considère une v.a. X prenant la valeur 1 avec probabilité $2/3$ et la valeur $1/4$ avec probabilité $1/3$ et une v.a. indépendante Y prenant la valeur $1/2$ avec probabilité $3/7$ et la valeur 2 avec probabilité $4/7$.

▷ **1)** Calculer l'espérance et la variance des v.a. X et Y.

▷ **2)** Déterminer la loi de $Z = XY$, son espérance et sa variance.

Exercice 2 : Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit (X,Y) un couple de variables aléatoires entières dont la loi est donnée par

$$\forall i, j \geq 0, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \alpha^{i+j}(1-\alpha)^2.$$

▷ **1)** Donner la loi de X et la loi de Y.

▷ **2)** Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

▷ **3)** Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

▷ **4)** Pour $n \geq 0$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = n\}$.

▷ **5)** Calculer la fonction de répartition F de $I = \min(X,Y)$.

Exercice 3 : Soit (X,Y) un couple de v.a. réelles de densité f sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{x}+y^2}{2}}}{\sqrt{32\pi x}} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

▷ **1)** Vérifier que f est bien une densité.

▷ **2)** Montrer que la loi de X a pour densité $g(x) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}}}{4\sqrt{x}} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$.

▷ **3)** Quel est la loi de Y ? Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

▷ **4)** Déterminer la loi de $Z = \sqrt{X}$.

Exercice 4 : Soient $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de lois données par

$$\mathbb{P}(X_n = -x_n) = \mathbb{P}(X_n = x_n) = \frac{1}{2}.$$

On pose également

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

▷ **1)** Calculer l'espérance et la variance de X_n puis de S_n quelque soit $n \geq 1$.

▷ **2)** On va montrer que $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n^2} = 0$.

(a) Justifier le résultat lorsque la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est constante et préciser la limite.

(b) Montrer le résultat annoncé. On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

▷ **3)** Montrer que $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n^{2+\varepsilon}} = 0$ où $\varepsilon > 0$.

▷ **4)** On va montrer que $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge en loi lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = \sigma^2$ pour un certain $\sigma^2 \geq 0$.

(a) Justifier le résultat lorsque la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est constante égale à σ et préciser la limite.

(b) Calculer la fonction caractéristique φ_n de $S_n/\sqrt{n}$.

(c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\varphi_n(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{v_n}{n}t^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} x_k^4\right)\right).$$

On rappelle qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\cos(x) - 1 + x^2/2| \leq Cx^4$ pour tout x dans un voisinage de 0.

(d) En déduire le résultat annoncé.