Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques

Année universitaire 2017–2018
Département de Mathématiques

L3 — Topologie des espaces métriques
Épreuve du 12 janvier 2018 — Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Justifier vos affirmations.
Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Exercice 1. (4 points) Soit (E,d) un espace métrique ayant au moins 2 éléments. Soit X une partie finie non vide de E. Pour chaque question ci-dessous, donner une preuve si la réponse est affirmative, sinon trouver un contre-exemple simple.

1a. Est-ce que X est nécessairement une partie fermée de E ?

1b. Est-ce que X est nécessairement une partie compacte de E ?

1c. Est-ce que X est nécessairement une partie complète de E ?

1d. Est-ce que X est nécessairement une partie connexe de E ?

Exercice 2. (4 points) Soit X un ensemble non vide. On note par F l'ensemble des parties finies de X. Pour $A,B \in F$, on désigne par $A\Delta B$ la différence symétrique de A et B. Rappelons que $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Pour tous $A,B \in F$, on pose $\delta(A,B) = \mathrm{card}(A\Delta B)$.

2a. Montrer que δ définit une distance sur F.

2b. Soit $A \in F$. Déterminer la boule ouverte $B(A,1)$.

2c. Caractériser les parties ouvertes de (F,δ).

Exercice 3. (5 points) Rappelons que $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$. On munit $\mathbb{C}$ de sa norme usuelle, c'est-à-dire le module de nombres complexes.

3a. Montrer que $\mathbb{S}^1$ est une partie connexe de $\mathbb{C}$.

3b. Montrer que $\mathbb{S}^1$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

3c. En déduire que si $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ est continue alors il existe un $z \in \mathbb{S}^1$ tel que $f(z) = f(-z)$.

3d. En déduire que $\mathbb{S}^1$ n'est pas homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (7 points) On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{i=2} x_i y_i$ pour $x = (x_1,x_2)$ et $y = (y_1,y_2)$. On note la norme et la distance euclidienne associées à ce produit scalaire par $\|\ \|$ et d respectivement, i.e., $\|x-y\| = d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{i=2}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$.

Soit K une partie compacte convexe non vide de $\mathbb{R}^2$. Pour $x \in \mathbb{R}^2$, on note par $d(x,K) := \inf_{y\in K} d(x,y)$ la distance de x à K. (*Indication pour cet exercice : Faites des dessins !*)

4a. Montrer que pour $x \in K^{\complement}$, on a $d(x,K) > 0$.

4b. Montrer que pour $x \in K^{\complement}$, il existe un point $x' \in K$ tel que $d(x,x') = d(x,K)$.

4c. Utiliser la convexité de K pour établir l'unicité de x'.

4d. Pour $x \in K^{\complement}$, on note par p_x l'unique point de K tel que $d(x,p_x) = d(x,K)$. Montrer que pour tout $x \in K^{\complement}$, p_x appartient à la frontière ∂K de K.