Géométrie des courbes et des surfaces (LMo6G1)

Examen final
— durée : 3 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés.

La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Sauf indication contraire, toute réponse devra être soigneusement justifiée.

Bien que les quatre exercices soient indépendants, certains résultats énoncés dans l'Exercice 3 peuvent être utiles pour répondre aux questions de l'Exercice 4.

Exercice 1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée birégulière.

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Rappeler la *définition* du repère de Frenet $\big(\mathrm{T}(t), \mathrm{N}(t), \mathrm{B}(t)\big)$ de α au point $\alpha(t)$.

(2) Soit $t \in \mathbb{R}$. Rappeler les *définitions* de la courbure $\kappa(t)$ et de la torsion $\tau(t)$ de α au point $\alpha(t)$.

On suppose désormais que $I := \mathbb{R}$ et que α est définie par $\alpha(t) := (1 + t^2, t, t^3)$.

(3) Vérifier que α est birégulière.

(4) Calculer κ et τ.

(5) La courbe α est-elle plane ?

Exercice 2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par longueur d'arc. On suppose que α est birégulière et qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in I, \quad \tau(t) = c \cdot \kappa(t)$$

où κ désigne la courbure de α et τ sa torsion. On fixe $t_0 \in I$ et on pose $r := \sqrt{1 + c^2}$.

(1) Soit $(\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B})$ le repère de Frenet de α. Montrer que le triplet (u, v, w) défini par

$$u := \mathrm{N}(t_0), \quad v := -\frac{1}{r}\,\mathrm{T}(t_0) + \frac{c}{r}\,\mathrm{B}(t_0), \quad w := \frac{c}{r}\,\mathrm{T}(t_0) + \frac{1}{r}\,\mathrm{B}(t_0)$$

est une base orthonormée de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, et préciser si cette base est directe ou indirecte.

(2) Soit $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée définie par

$$\tilde{\alpha}(t) := \alpha(t_0) + \frac{1}{r}\Big(\int_{t_0}^{t} \sin\big(rK(s)\big)\,\mathrm{d}s\Big) \cdot u - \frac{1}{r}\Big(\int_{t_0}^{t} \cos\big(rK(s)\big)\,\mathrm{d}s\Big) \cdot v + \frac{c(t - t_0)}{r} \cdot w$$

où on a noté

$$K(s) := \int_{t_0}^{s} \kappa(a)\,\mathrm{d}a.$$

Montrer que $\tilde{\alpha}$ est paramétrée par longueur d'arc et qu'elle est birégulière.

(3) Montrer que $\tilde{\alpha}$ est une hélice dont on précisera la direction et l'angle.

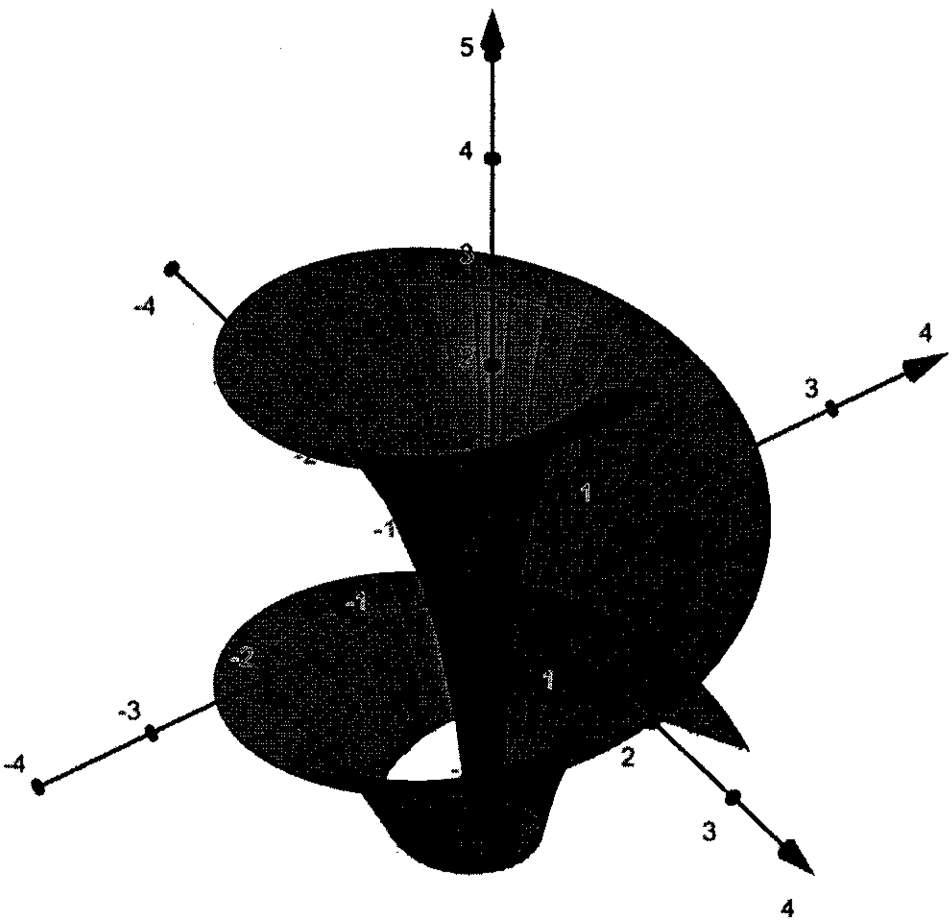
(4) Calculer le repère de Frenet $(\tilde{\mathrm{T}}, \tilde{\mathrm{N}}, \tilde{\mathrm{B}})$ de $\tilde{\alpha}$ en chaque point $\tilde{\alpha}(t)$ pour $t \in I$. Ensuite, calculer la courbure $\tilde{\kappa}$ et la torsion $\tilde{\tau}$ de $\tilde{\alpha}$.

(5) Comparer les courbes paramétrées α et $\tilde{\alpha}$ en utilisant le résultat de la question (4).

Exercice 3. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ des constantes. La *surface de Dini* est la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}\times]0,\pi/2[\to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(u,v) := \Big(a\cos(u)\sin(v)\,,\ a\sin(u)\sin(v)\,,\ a\cos(v) + a\ln\big(\tan(v/2)\big) + bu \Big).$$

Soit $S := \varphi(\mathbb{R}\times]0,\pi/2[)$ le support de φ. Voici, par exemple, une illustration partielle de S pour les constantes $a := 2$ et $b := 1/2$:



Pour un point $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on note $p := \varphi(r,s) \in S$ et

$$f := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(r,s), \qquad g := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(r,s).$$

(1) Montrer que $\|f \wedge g\| = a\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(v)$ et en déduire que la nappe paramétrée φ est régulière.

(2) Calculer la matrice de la première forme fondamentale I_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

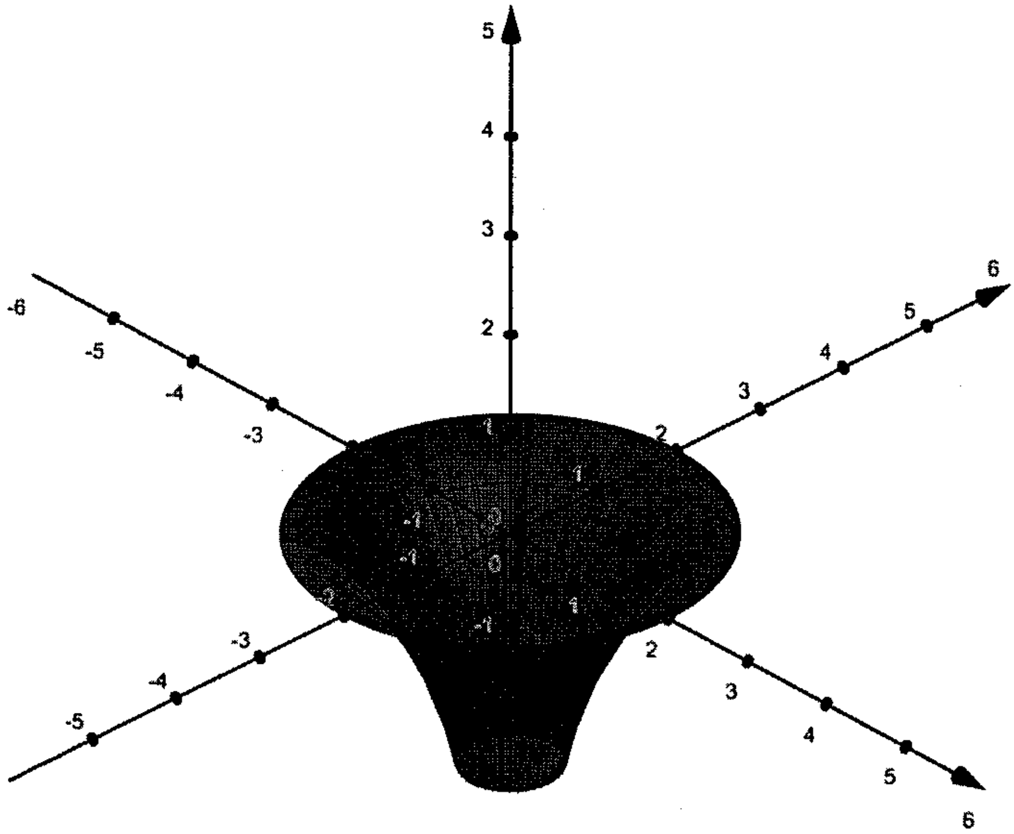
(3) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale II_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(4) Montrer que la courbure de Gauss K_p de S en p vaut $-1/(a^2+b^2)$.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ une constante. On considère la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}\times]0,\pi/2[\to \mathbb{R}^3$ de l'exercice précédent dans le cas particulier où $b := 0$:

$$\varphi(u,v) := \big(a\cos(u)\sin(v)\,,\, a\sin(u)\sin(v)\,,\, a\cos(v) + a\ln\big(\tan(v/2)\big)\big).$$

On note $S := \varphi(\mathbb{R}\times]0,\pi/2[)$ son support. Voici, par exemple, une illustration partielle de S pour la constante $a := 2$:



(1) Justifier que φ est une surface de révolution en donnant son axe de révolution D, sa courbe génératrice c et en précisant le plan affine P de $\mathbb{R}^3$ dans lequel D et le support de c sont contenus. (Ne pas oublier de vérifier que c est régulière.)

(2) Rappeler la définition d'une surface régulière (c'est-à-dire d'une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux). Ensuite, montrer avec soin que S est une surface régulière. *(On pourra considérer la restriction de φ à chaque compact de la forme $[j,k]\times[l,m]$ où $j<k$ avec $|k-j|<2\pi$ et où $0<l<m<\pi/2$.)*

(3) Soit le cylindre circulaire

$$T := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}.$$

Rappeler pourquoi T est une surface régulière et rappeler *sans démonstration* quelle est sa courbure de Gauss.

(4) Proposer *sans justification* un difféomorphisme $\psi : T \to S$ en précisant quel est le difféomorphisme réciproque $\psi^{-1} : S \to T$.

(5) Peut-on trouver un difféomorphisme $\psi : T \to S$ qui soit aussi une isométrie ?