

L3 - Probabilités discrètes

L2-Probabilités, Université de Bourgogne

18 décembre, 2018

Exercice 1 On choisit trois entiers dans l'ensemble $S = \{1, 2, \dots, 15\}$. Calculer la probabilité que

- 1) leur somme est impaire,
- 2) leur produit est impair,
- 3) la somme est impaire sachant que le produit est impair,
- 4) le produit est impair sachant que la somme est impaire.

Exercice 2 Une urne contient N boules parmi lesquelles se trouvent N_1 boules blanches, N_2 boules noires et N_3 boules vertes ($N_1 + N_2 + N_3 = N$). On effectue dans l'urne n tirages d'une boule et on définit les variables aléatoires suivantes : X (resp. Y) est le nombre de boules blanches (resp. noires) obtenues, X_i (resp. Y_i) vaut 1 si le i ème tirage donne une boule blanche (resp. noire) et 0 sinon. On suppose que les tirages ont lieu avec remise.

- 1) Calculer $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathbb{E}(Y_j)$ et $\mathbb{E}(X_i \cdot Y_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n$.
- 2) Calculer la covariance $C(X, Y)$, et les variances σ_X^2 et σ_Y^2 .
- 3) Calculer $\rho(X, Y)$. Montrer que $|\rho(X, Y)| = 1$ implique que $N_3 = 0$.

Rappel : $\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On pose

$$Y = (-1)^X.$$

- 1) Calculer $\mathbb{P}(\{X = \text{pair}\})$ et $\mathbb{P}(\{X = \text{impair}\})$.
- 2) Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
- 3) Déterminer la fonction génératrice G_X de X : $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$. Exprimer $\mathbb{E}(Y)$ à l'aide de G_X .

Exercice 4 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi qu'une variable aléatoire X à valeurs entières. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère : $S_n = \max\{X_0, \dots, X_n\}$.

- i) On suppose qu'il existe un entier L tel que $P(\{X \leq L\}) = 1$ et $P(\{X = L\}) > 0$. Montrer que pour tout $\ell < L$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{S_n \leq \ell\}) = 0.$$

Montrer que S_n converge en probabilité vers L , lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- ii) On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On pose $T_n = 1/S_n$. Montrer que T_n converge vers 0 en probabilité.

Rappel : On dit qu'une suite de variables aléatoires X_n convergent vers X en probabilité si pour tout $\eta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{|X_n - X| \geq \eta\}) = 0.$$

4/4