

Examen de l'U.E. STATISTIQUE - jeudi 20 juin 2019 14h-17h *Statistique inférentielle*

Question de cours (2 pts)

1. Donner la définition de l'erreur quadratique moyenne $EQM(T)$ d'un estimateur T d'un paramètre θ .
2. Démontrer la formule du cours $EQM(T) = B(T)^2 + V(T)$.

Exercice 1 : (5 pts)

1. Rappeler l'expression du coefficient de corrélation linéaire $r(x, y)$ entre deux séries statistiques quantitatives $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.
2. Rappeler ce que signifie $r(x, y) = 1$ et $r(x, y) = -1$.
3. Montrer que $r(x, y)$ est invariant par changements d'unités de chacune des séries statistiques x et y (On ne fait pas forcément le même changement d'unité sur les deux séries statistiques).
4. Afin d'étudier la relation qui pourrait exister entre l'âge et la pression sanguine, un médecin mesure sur 8 femmes d'âges (x) différents la pression sanguine systolique (y).

x (ans)	56	42	72	36	63	47	55	49
y (mm Hg)	147	125	160	118	149	128	150	145

- a) Donner le coefficient de corrélation linéaire entre x et y .
- b) Donner l'équation de la droite de régression de y en fonction de x .
- c) Quelle estimation de la tension donne cette droite de régression pour une femme âgée de 68 ans ?

Exercice 2 : (3 pts)

On observe la variable aléatoire donnant le nombre X d'accidents par jour sur une période de 50 jours dans une certaine ville. On obtient les résultats suivants.

Nombres d'accidents	Nombre de jours
0	21
1	18
2	7
3	3
4	1

Faire un test statistique au niveau 0.05 pour dire si X suit une loi de Poisson.

Exercice 3 : (4 pts) Les producteurs de vin ajoutent du SO_2 pour protéger le vin d'une part contre les levures et les bactéries et d'autre part contre l'oxydation. Chez deux producteurs A et B, on a mesuré les concentrations (en mg/l) en SO_2 de 20 bouteilles pour chacun. Les résultats des mesures (moyenne et écarts-types) sont les suivants :

$$m_A = 21,39, s_A = 0,31$$

$$m_B = 21,25, s_B = 0,206$$

On supposera que la concentration en SO_2 suit une loi normale.

1. Comparer les dispersions en teneur en SO_2 des vins des deux producteurs.
2. Est-ce que le producteur A ajoute plus de SO_2 à son vin que le producteur B ?

Exercice 4 : (6 pts)

On considère une variable aléatoire X de paramètre a réel positif non nul ayant pour densité :

$$f_a(x) = \frac{a}{x^{a+1}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

1. Pour quelles valeurs de a l'espérance de X est-elle définie ? Calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. En déduire un estimateur naturel de a .
3. Pour quelles valeurs de a la variance de X est-elle définie ? Calculer $\mathbb{V}(X)$.
4. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre a .
5. On dispose de l'échantillon suivant issu de X :

1,52 2,73 1,81 3,4 1,22 2,42 1,92.

Donner une estimation de a et en déduire une estimation de la probabilité que X soit supérieur à 2.