L3 maths

Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2019-2020
Janvier 2020

Algèbre 1
Examen

Question de cours 1.

(1) Soient $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal bilatère de B. Montrer que $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal bilatère de A.

(2) Soient $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux surjectif et I un idéal bilatère de A. Montrer que $\varphi(I)$ est un idéal bilatère de B.

(3) Donner un exemple d'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ et d'un idéal I de A tels que $\varphi(I)$ ne soit pas un idéal de B.

(4) Soit K un corps et I un idéal de K. Montrer que $I = \{0_K\}$ ou $I = K$.

(5) Soient $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que, si A est un corps, alors φ est injectif.

Attention : nous ne supposons pas connu le fait que l'image d'un groupe par un homomorphisme de groupes est un groupe et que l'image réciproque d'un groupe par un homomorphisme de groupes est un groupe.

Question de cours 2. Soit A un anneau commutatif.

(1) Donner les définitions d'élément irréductible et d'élément premier de A.

(2) Donner les définitions d'idéal premier et d'idéal maximal de A.

(3) Supposons que A est principal. Soit x un élément non nul de A. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

  (i) l'élément x est irréductible,

  (ii) l'idéal (x) est premier,

  (iii) l'idéal (x) est maximal.

Exercice 1.

(1) Soit p un nombre premier. Montrer que $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

(2) Soit A un anneau commutatif. Montrer qu'il existe un homomorphisme $\mu_A : \mathbb{Z} \to A$. *L'homomorphisme μ_A est unique, mais il n'est pas demandé de démontrer l'unicité.*

À partir de maintenant on suppose que A est un anneau commutatif et que $\mathrm{Ker}(\mu_A) = p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier. On dit alors que A est de *caractéristique* p.

(3) Montrer que l'homomorphisme $\mu_A : \mathbb{Z} \to A$ induit un homomorphisme injectif $\bar{\mu}_A : \mathbb{F}_p \to A$. Montrer que l'application $\mathbb{F}_p \times A \to A$, $(\lambda, a) \mapsto \lambda * a = \bar{\mu}_A(\lambda)\, a$ définit une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel sur A.

(4) Soit $\varphi : A \to A$ un endomorphisme (d'anneaux). Montrer que $\varphi \circ \mu_A = \mu_A$. En déduire que $\varphi \circ \bar{\mu}_A = \bar{\mu}_A$.

(5) Soit $\varphi : A \to A$ un endomorphisme (d'anneaux). Montrer que φ est $\mathbb{F}_p$-linéaire.

Exercice 2.

(1) Soient $\omega = e^{2i\pi/3}$ et A le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ formé des éléments de la forme $a + b\omega$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. (*Indication : utiliser l'égalité* $\omega^2 + \omega + 1 = 0$)

(2) Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $s(z) = |z|^2$. Montrer que $s(z) \in \mathbb{N}$ pour tout $z \in A$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + b\omega$. Montrer que, si $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + b\omega$ avec $|a|, |b| \leq \frac{1}{2}$, alors $s(z) \leq \frac{3}{4}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe $q \in A$ tel que $s(z - q) \leq \frac{3}{4}$.

(3) Montrer que A est euclidien. (*Indication : Utiliser le fait que* $s(zz') = s(z)\,s(z')$ *pour tous* $z, z' \in \mathbb{C}$.)

(4) [Question bonus] Déterminer le groupe $\mathcal{U}(A)$ des unités de A.