Licence de Mathématiques (2019-2020)

Intitulé de l'enseignement : Algèbre linéaire et bilinéaire (L3).
Date : mardi 07 janvier 2020, 14h-17h

Examen Terminal

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1. Dualité. (*Les questions de cet exercice sont essentiellement indépendantes.*)
Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K.

(1) Montrer que deux formes linéaires non-nulles sur E ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.

(2) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme :
$$\iota\colon E \to E^{**} = \mathcal{L}(E^*, K),\ x \mapsto (\epsilon \in E^* \mapsto \epsilon(x) \in K).$$

(3) Soit G un sous-espace vectoriel de E. En utilisant la propriété universelle du morphisme de passage au quotient, montrer l'existence d'un isomorphisme canonique $(E/F)^* \simeq F^\perp$.

(4) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. Rappeler la définition de l'application transposée ${}^t\varphi \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ puis montrer que $\mathrm{Im}({}^t\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)^\perp$.

(5) Soient $\psi \in \mathcal{L}(E)$ et G un sous-espace vectoriel de E. Montrer que G est stable par ψ si et seulement si $G^\perp$ est stable par ${}^t\psi$.

(6) On fixe $K = \mathbb{C}$. En utilisant la question précédente montrer que $\psi \in \mathcal{L}(E)$ admet un sous-espace stable de codimension 1 dans E. En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\psi)$ soit triangulaire supérieure.

(7) Est-ce que le résultat démontré à la question précédente reste vrai si on fixe $K = \mathbb{R}$?

Exercice 2. De Frobenius à Jordan et réciproquement. (*Les questions sont indépendantes.*)

(1) Quelles sont les réduites de Frobenius des endomorphismes de $\mathbb{C}^4$ dont les invariants de similitudes sont les polynômes suivants :
- a) $P_1 = P_2 = X(X-1)$
- b) $P_1 = X^2(X-1)$, $P_2 = X-1$
- c) $P_1 = X(X-1)^2$, $P_2 = X$
- d) $P_1 = X^2(X-1)^2$

Déterminer, dans chaque cas, la réduite de Jordan correspondante (on veillera à bien justifier la réponse) et donner une base de Jordan.

(2) On considère les réduites de Jordan suivantes (où tous les coefficients qui n'apparaissent pas valent 0) :
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$
Déterminer les invariants de similitudes des endomorphismes de $\mathbb{C}^7$ définis dans la base canonique par les matrices U et V, puis donner les réduites de Frobenius correspondantes.

(3) Quelle est la réduite de Jordan resp. de Frobenius d'une matrice diagonale $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$? On prendra garde à bien distinguer les cas $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq \beta$.

Exercice 3. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n = 2$ ou $n = 3$, montrer que deux matrices sont semblables si et seulement elles ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal. Donner un contre-exemple lorsque $n = 4$. Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 4. Quelques formes quadratiques sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les applications suivantes :

- $q_1 \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{tr}(A)^2$
- $q_2 \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{tr}({}^tAA)$
- $q_3 \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$

(1) Montrer que chaque q_i est une forme quadratique et préciser la forme polaire associée.
(2) Donner dans chaque cas (en justifiant soigneusement) le rang, le noyau et la signature de la forme quadratique q_i.
(3) Donner une base orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour chacune des formes quadratiques q_i.
(4) On suppose $n = 2$ et on munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\varphi \colon (A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$. Déterminer pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$ une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit à la fois orthogonale pour q_i et orthonormale pour le produit scalaire φ.

Exercice 5. Matrices congruentes dans $\mathcal{M}_2(K)$.
(1) Donner un exemple de deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui sont congruentes vues comme matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais ne sont pas congruentes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) Donner un exemple de deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ qui sont congruentes vues comme matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais ne sont pas congruentes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.
(3) Combien y-a-t-il de classes de congruence dans $\mathcal{M}_2(K)$ lorsque $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$? Donner un représentant explicite pour chaque classe de congruence.

Exercice 6. Espaces hermitiens vs espaces euclidiens.
Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace hermitien (de dimension finie). On suppose que f est un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, on ait $\langle f(x), x \rangle = 0$.
(1) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle f(x), y \rangle = 0$.
(2) En déduire que f est l'endomorphisme nul.
(3) Peut-on démontrer la même chose dans le cas où $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien ?

Exercice 7. Autour de la décomposition polaire. (*Les questions sont indépendantes.*)
(1) Rappeler l'énoncé exact de la décomposition polaire pour une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
(2) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec décomposition polaire $M = QH$ (c'est-à-dire que $Q \in U(n)$ est unitaire et $H \in H_n^{++}$ est hermitienne définie positive). Montrer que M est normale si et seulement si $HQ = QH$.
(3) En vous inspirant de la preuve de la décomposition polaire, montrer que l'application $H_n^{++} \to H_n^{++}$, $M \mapsto M^2$ est une bijection continue. Est-ce que c'est un homéomorphisme ?