Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Janvier 2020

CALCUL DIFFERENTIEL - EXAMEN (3 heures)

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

I *(6 pts)*

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = y^3 + xy^2 + x^2y - 1$.

1. ***(1 pt)*** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y > 0$ tel que $f(x,y) = 0$. On note $\varphi(x)$ ce nombre.
2. ***(1 pts)*** Montrer que la fonction φ est de classe C^1.
3. ***(1 pt)*** Montrer que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. ***(1 pt)*** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.
5. ***(2 pts)*** Montrer que $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

II *(9 pts)*

On considère l'application $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 définie par :

$$\varphi(x,y) = \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) - x, \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y\right).$$

1. ***(1 pt)*** Calculer la jacobienne de φ en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. ***(1 pt)*** En déduire que φ est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. ***(1 pt)*** Montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un ensemble ouvert.
4. ***(1 pt)*** Montrer que pour tous $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ avec $u_1 < u_2$, il existe $u \in]u_1, u_2[$ tel que
$$\sin\left(\frac{u_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{u_1}{2}\right) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\left(\frac{u}{2}\right).$$
5. ***(2 pts)*** En déduire que φ est injective.
6. ***(2 pts)*** Montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est fermé.
7. ***(1 pt)*** En déduire que φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

III *(5 pts)*

On considère le système de deux équations à trois inconnues

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= 1 \\ x^3 - y^3 + z^3 &= 1\,. \end{aligned}$$

On désigne par $V \subseteq \mathbb{R}^3$ l'ensemble des solutions de ce système.

1. ***(1 pt)*** Vérifier que le point $(2,-1,-2)$ est une solution.
2. ***(1 pt)*** Montrer qu'il existe deux fonctions φ et ψ de classe C^1 définies au voisinage V de -2 telles que, pour tout $z \in V$, $(\varphi(z), \psi(z), z)$ est solution du système.
3. ***(2 pt)*** Calculer $\varphi'(-2)$ et $\psi'(-2)$.
4. ***(1 pt)*** Déterminer l'espace tangent à V au point A.