Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques
Licence Sciences L1, semestre 1, filière Electronique-Informatique, année 2019/2020.

Examen de Mathématiques MaIE1A, première session, **9 Janvier 2020 (durée : 2h).**
Les documents, les calculatrices et tout autre objet électronique ne sont pas autorisés.
Les cinq exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

exercice 1

1. Déterminer les deux racines carrées complexes de $3+4i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré $z^2-2z-2-4i=0$.

exercice 2

1. Déterminer :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)(e^x-1)}{\ln(1+x^2)},\ \lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}.$$
2. Expliquer pourquoi la fonction $x\mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0. Par contre, calculer $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Calculer :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x-9}}{x}.$$

exercice 3

1. Déterminer les nombres réels A et B tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$ et $x\neq 1$:
$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}.$$
En déduire une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x(x-1)}$ sur $]1,+\infty[$, puis sur $]0;1[$.
2. Après avoir remarqué que $9+x^2=9(1+\left(\frac{x}{3}\right)^2)$, calculer la primitive de $x\mapsto\frac{1}{9+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 3.
3. Calculer une primitive de $x\mapsto x(\ln(x)+e^x)$ sur $]0,+\infty[$.
4. Déterminer une primitive de $x\mapsto\frac{1}{\sin(x)}$ sur $]0,\pi[$. On pourra effectuer le changement de variable $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

TSVP $\longrightarrow$

exercice 4
Soit la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.

1. Quel est le domaine de définition D_f de f ?
2. Sur quel intervalle f est-elle continue ? Sur quel intervalle f est-elle dérivable ?
3. Calculer la dérivée de f et étudier les variations de f.
4. La fonction f admet-elle des extrema ?

exercice 5
On considère la fonction $h : x \mapsto \arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$. Cette fonction est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. On souhaite trouver une expression plus simple pour $h(x)$. Une méthode possible consiste à calculer la dérivée de h.

1. Calculer la dérivée de h. Le résultat obtenu est très simple.
2. En déduire alors une nouvelle expression pour $h(x)$.