

Examen du 8 janvier 2020, 11h00-13h00.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + x - \arctan(x).$$

- Déterminer le domaine de définition maximal de f .
- Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
- Calculer la dérivée de f .
- Trouver tous les points critiques de f .
- Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de f .

2. Calculer la limite suivante en utilisant le théorème de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{(\ln(x+1))^2}.$$

3. Donner une primitive de :

a. $\frac{1}{x-1}$, b. $x \sin(x)$, c. $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$.

4. Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^1 (x-1)(x^2+2) dx$, b. $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx$, c. $\int_{-1}^0 x^2 \sqrt{x+1} dx$.

Suggestion : Dans c. utiliser le changement de variable $x = y^2 - 1$.

5. Calculer la dérivée de :

a. $h(x) = \int_0^x \sin(t) dt$,
 b. $g(x) = \int_0^{\sin(x)} (\arcsin(t))^5 dt$, $x \in [0, \pi/2]$.

6.

- a. Calculer les trois premiers termes non nuls du polynôme de Taylor en 0 de la fonction suivante :

$$\cos(x)\sqrt{x+1}.$$

- b. Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\sqrt{x+1} - 1}{\sin(x)}.$$