Etude du mouvement d'un disque sur un plateau oscillant

sur une idée A. El Hajj et O. Kabbani (Etudiants de L3-Mécanique, 2006-2007)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ supposé galiléen, où le vecteur $\vec{x_2}$ est vertical ascendant. On suppose l'existence d'un champ de pesanteur noté $-g\vec{x_2}$.

Le système étudié, noté S, est un disque parfaitement rigide de rayon R. Son épaisseur est très faible par rapport à son rayon. Pour cette raison, il est modélisé comme étant sans épaisseur. Le repère lié à S, orthonormé direct, est noté $R_s = (C, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ où C est le centre géométrique du disque. On note b_s la base de R_s. Les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont dans le plan du disque. Le matériau constitutif de S est supposé homogène et ρ désigne sa densité surfacique de masse. La masse totale de S est notée m. On donne la matrice d'inertie de S au point C, dans b_s :

$$[J_C(S)]^{b_s} = \frac{mR^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

On considère également un plateau rigide oscillant, noté P (Fig. 1). On note $R' = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x_3})$ le repère orthonormé direct lié à P dont b' désigne la base, pour lequel le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal au plan de P et le vecteur $\vec{u}$ est contenu dans le plan du plateau. Si on peut estimer que la longueur du plateau (sa dimension suivant l'axe $(O, \vec{x_3})$) est infinie, en revanche, sa largeur (sa dimension suivant l'axe $(O, \vec{u})$) vaut $2L$, telle que : $\overrightarrow{OE_1} = -L\vec{u}$ et $\overrightarrow{OE_2} = L\vec{u}$, E_1 et E_2 désignant les points situés à chacune des extrémités de plateau (dans le plan $x_3 = 0$). Ce plateau est en liaison rotoïde parfaite d'axe $(O, \vec{x_3})$ sur une tige verticale dont les extrémités sont les points O et E, où E est rigidement fixé dans un bâti fixe dont R est le repère lié. On note : $\theta = \widehat{(\vec{x_1}, \vec{u})} = \widehat{(\vec{x_2}, \vec{v})}$. En se plaçant Dans le plan $R = (O, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$

Le disque S roule sans glisser sur la pente du plateau P (Fig. 1) de telle sorte que le plan $(C, \vec{I}, \vec{J})$ reste, à tout instant, dans le plan $(O, \vec{x_1}, \vec{x_2})$. On note : $\varphi = \widehat{(\vec{x_1}, \vec{I})} = \widehat{(\vec{x_2}, \vec{J})}$. On désigne par A le point géométrique où se produit le contact entre le disque et le plateau et on pose : $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{u}$. On note A_p le point matériel de P au lieu du contact et A_s celui de S en ce même lieu.

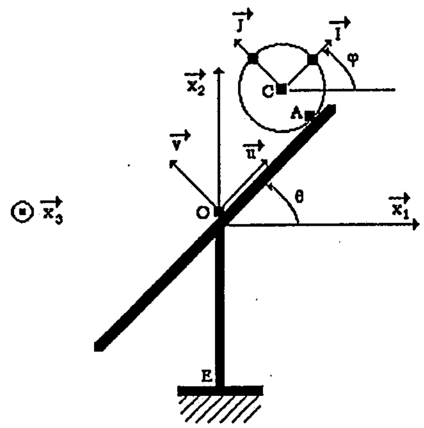

FIGURE 1 – Le système en mouvement

1 Cinématique (le repère R' sera utilisé comme repère de projection

1) Donner les éléments de réduction du torseur cinématique de P par rapport à R en O.

2) Donner les éléments de réduction du torseur cinématique de S par rapport à R en C.

3) Trouver l'équation induite par la condition de roulement sans glissement en A.

4) En utilisant l'équation précédente, réécrire les éléments de réduction du torseur cinématique de S par rapport à R en C où la grandeur $\dot{\lambda}$ a été éliminée. Cette expression du torseur cinématique sera celle qu'il convient d'utiliser dans la suite.

2 Cinétique (le repère R' sera utilisé comme repère de projection

1) Donner les éléments de réduction du torseur cinétique de S par rapport à R en C.

2) Donner les éléments de réduction du torseur dynamique de S par rapport à R en C.

3) Calculer l'énergie cinétique de S par rapport à R.

3 Dynamique (le repère R' sera utilisé comme repère de projection

1) Faire le bilan des sollicitations mises en jeu et donner le torseur qui modélise chacune d'elle, ainsi que sa puissance développée dans le mouvement de S par rapport à R et éventuellement le potentiel dont elle dérive.

2) Ecrire les équations que l'on peut déduire du Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à S.

3) Montrer que si l'on suppose connues les fonctions $\lambda(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$, alors on connait, au cours du temps, l'ensemble des torseurs d'effort auxquels est soumis le système.

4) On suppose que la fonction $\theta(t)$ est une donnée. Ecrire les 2 équations différentielles (couplées) qui gouvernent l'évolution horaire des paramètres $\lambda(t)$ et $\varphi(t)$.

5) Etude d'un mouvement particulier. On suppose que le mouvement du système est obtenu à partir des conditions initiales (à $t = t_0 = 0$) suivantes sur l'angle φ : $\varphi(t_0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0$. Concernant le paramètre λ, on suppose que le point de contact à l'instant initial coïncide avec l'extrémité E_2 du plateau, c'est-à-dire qu'on donne $\lambda(t_0) = \lambda_0 = L$. La valeur de $\dot{\lambda}(t_0) = \dot{\lambda}_0$ est donnée par la relation de roulement sans glissement (valable à tout instant) : $\dot{\lambda}(t) = R(\dot{\theta}(t) - \dot{\varphi}(t))$. En effet, puisque la fonction $\theta(t)$ est connue, c'est-à-dire que l'on a accès à ses valeurs et celles de ses dérivées successives à tout instant, on a en particulier accès à : $\theta(t_0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0$ et $\ddot{\theta}(t_0) = \ddot{\theta}_0$. Par suite : $\dot{\lambda}(t_0) = \dot{\lambda}_0 = R(\dot{\theta}(t_0) - \dot{\varphi}(t_0))$.

On se place ici dans le cas particulier suivant :
- $\theta(t) = \theta_{t_0} =$ constante ;
- $\varphi(t_0) = \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0 = 0$;
- $\lambda(t_0) = \lambda_0 = L$ et par conséquent $\dot{\lambda}(t_0) = \dot{\lambda}_0 = 0$.

Déterminer $\lambda(t)$ et $\varphi(t)$.