L3 Phys PC + PFA

EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE I   L3,   janvier 2020

1) Répondre aux questions suivantes:
a) Formuler l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique.
b) Préciser les notions d'état et d'observable, et leur relation avec une mesure dans une expérience. Donner un exemple.
c) Quel est le rôle de l'équation de Schrödinger stationnaire? et de l'équation de Schrödinger dépendant du temps?
d) Quel est le lien entre les solutions de ces deux équations?
e) Quelle est l'interprétation physique de l'opérateur Hamiltonien?
f) Formuler les relations d'incertitude de Heisenberg et préciser leur signification.
h) Citer un aspect de type corpusculaire et un aspect de type ondulatoire dans le comportement d'un électron.

2) On considère une particule libre dont l'état est donné par la fonction d'onde

$$\psi(x) = \nu \exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right)$$

où p_0, x_0 sont des paramètres réels.
(a) Déterminer la densité de probabilité de la coordonnée x. Déterminer la constante de normalisation ν.
(b) Déterminer les valeurs moyennes de la position et de l'impulsion de la particule.
(c) Déterminer la valeur moyenne de l'énergie cinétique.
(d) Déterminer les écarts types de la position et de l'impulsion de la particule.
(e) Analyser ces résultats en termes de la relation d'incertitude.

Indications :
$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) = a\sqrt{\pi}.$
$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ (x-x_0)\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) = 0.$
$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) = a\sqrt{\pi}(x_0^2 + a^2/2).$
$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ (x-x_0)^2\exp\left(\frac{-(x-x_0)^2}{a^2}\right) = a\sqrt{\pi}a^2/2.$

3) On considère un oscillateur harmonique décrit par l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Après le changement de variables

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \qquad \bar{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p \equiv -i\frac{d}{d\bar{x}}$$

l'Hamiltonien s'écrit

$$H = \hbar\omega\bar{H}, \qquad \bar{H} = \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{p}^2)$$

On définit les opérateurs $a := (\bar{x} + i\bar{p})/\sqrt{2}$ et $N := a^\dagger a$.
(a) Déterminer les relations de commutation $[\bar{x}\ ,\ \bar{p}]$, $\quad [a\ ,\ a^\dagger]$, $\quad [N\ ,\ a]$, $\quad [N\ ,\ a^\dagger]$.
(b) Exprimer H en fonction de a et $a^\dagger$.
(c) Déterminer les valeurs propres de H.
(d) Ecrire les deux fonctions propres φ_n de plus basses énergies, explicitement comme des fonctions de la variable x.