L3 maths

Université de Bourgogne — Année 2019-2020

Topologie des espaces métriques — 8 janvier

Contrôle terminal – 3h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.

Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet, (E, d) est un espace métrique et l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est muni de sa distance usuelle.

Exercice 1.

1) Pour chacune des deux assertions suivantes, determiner si elle est toujours vraie. Si c'est le cas, en donner une preuve. Sinon, en donner un contre-exemple.

$$\textbf{a)}\ \forall x \in E\ \exists y \in E \text{ tel que } d(x,y) = 0, \quad \textbf{b)}\ \exists y \in E \text{ tel que } \forall x \in E\ d(x,y) = 0.$$

2) Soit $f : E \to E$ une application. Numéroter les quatre assertions suivantes de sorte que

$$① \Longrightarrow ② \Longrightarrow ③ \Longrightarrow ④$$

puis démontrer ces implications. De plus, donner un contre-exemple à chacune des réciproques de ces implications.

a) Pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in E$ il existe $\delta > 0$ tel que si $y \in E$ vérifie $d(x,y) < \delta$ alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ et $x, y \in E$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d(x,y) < \delta$ alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

c) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in E$ vérifient $d(x,y) < \delta$ alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

d) Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et $x, y \in E$ vérifiant $d(x,y) < \delta$ alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Exercice 2.

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $\|\cdot\|$ une norme sur V. On munit V de la distance associée à $\|\cdot\|$. Soit $v \in V$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(v,r)$ est la boule fermée $\widetilde{B}(v,r)$.

2) Montrer que $B(v,r)$ est connexe.

3) Soit U un ouvert non vide de V. Rappelons que $\mathrm{Vect}(U)$ est le sous-espace vectoriel de V engendré par U. Montrer que $\mathrm{Vect}(U) = V$.

Exercice 3.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et soit $x \in E$.

1) Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x alors $X := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact de E.

2) Supposons maintenant que E est compact. Montrer que si x est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Exercice 4.

Dans cet exercice, on suppose que E est borné. Rappelons que si $F \subset E$ alors le diamètre de F est défini par

$$\mathrm{diam}(F) := \sup_{x,y\in F} d(x,y).$$

Par convention, le diamètre de l'ensemble vide est 0.

Soit $A \subset E$. Parmi les assertions suivantes, montrer celles qui sont toujours vraies et donner un contre-exemple aux autres.

$$\textbf{a)}\ \mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A}), \quad \textbf{b)}\ \mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\mathring{A}).$$

Exercice 5.
Dans cet exercice, on suppose que E est borné. Pour $x \in E$, on définit l'application $\phi_x \colon E \to \mathbb{R}$ par

$$\phi_x(y) := d(x,y).$$

1) Montrer que si $x \in E$ alors l'application ϕ_x est continue.
2) Pour la suite, B désignera l'ensemble des applications continues bornées de E dans $\mathbb{R}$. Pour f dans B, on pose

$$\|f\|_\infty := \sup_{a \in E} |f(a)|.$$

Rappelons que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur B et on notera d_∞ la distance associée à $\|\cdot\|_\infty$. Le fait que E soit borné et le résultat obtenu en **1)** impliquent que l'application Φ qui à $x \in E$ associe ϕ_x est une application bien définie de E dans B.
a) Montrer que Φ est continue.
b) Montrer que Φ est injective.
c) Montrer que Φ est une isométrie de l'espace métrique (E,d) vers l'espace métrique (B,d_∞) (c-à-d pour tout $x,y \in E$, $d_\infty(\Phi(x),\Phi(y)) = d(x,y)$).