

# Université de Bourgogne

## Licence de mathématiques - 3ème année Programme

### *Bachelor of Mathematics - 3rd year Program*

**Langue** : Français

**Responsable** : Olivier Couture (olivier.couture@u-bourgogne.fr)

**Language** : French

**Coordinator**: Olivier Couture (olivier.couture@u-bourgogne.fr)

## Objectifs

### *Aims*

Le but de la Licence mention Mathématiques de l'Université de Bourgogne est de fournir aux étudiants une formation mathématique générale de haut niveau. Elle doit leur permettre de prétendre aux emplois d'ingénieurs qui requièrent un bon bagage mathématique, ou de poursuivre leurs études dans différentes écoles ou masters.

*The aim of the Bachelor of Mathematics at the University of Burgundy (Université de Bourgogne) is to provide students with a high-level general mathematical training. It should qualify the students for engineering positions that require a high mathematical background, as well as for continuing their studies in graduated schools.*

## Cours du semestre 1 (septembre - janvier)

### *Courses of Semester 1 (September - January)*

#### **LM5A, Topologie des espaces métriques (Cours obligatoire - 6 ECTS - 50h)**

#### ***LM5A, Topology of metric spaces (Compulsory course - 6 ECTS - 50h)***

Rappels de calcul ensembliste. Notions sur les cardinaux. Espaces métriques. Aspects topologiques des espaces métriques. Classes spéciales d'espaces métriques : espaces compacts, espaces complets, espaces connexes. Applications aux espaces vectoriels normés.

*Summary of set computation. Notions on cardinality. Metric spaces. Topological aspects of metric spaces. Special classes of metric spaces: compact spaces, complete spaces, connected spaces. Applications to normed vector spaces.*

#### **LM5B, Calcul différentiel (Cours obligatoire - 6 ECTS - 50h )**

#### ***LM5B, Differential calculus (Compulsory course - 6 ECTS - 50h)***

Rappels sur les espaces vectoriels normés. Applications différentiables : définitions, exemples, premières propriétés. Théorème des accroissements finis et ses applications. Théorème d'inversion locale et difféomorphismes. Théorème des fonctions implicites. Dérivées d'ordre supérieurs et étude des extrema locaux. Sous-variétés de  $\mathbf{R}^n$  : représentation paramétrique, espaces tangents, problèmes d'extrémums liés.

*Summary on normed vector spaces. Differential maps: definitions, examples, first properties. Mean Value Theorem and its applications. Local inversion Theorem and diffeomorphisms. Implicit function Theorem. Higher order derivatives and study of local extrema. Submanifolds of  $\mathbf{R}^n$ : parametric representation, tangent spaces, problem of linked extrema.*

### **LM5C, Calcul intégral (Cours obligatoire - 6 ECTS - 50h)**

#### **LM5C, Integral calculus (Compulsory course - 6 ECTS - 50h)**

Familles sommables. Théorie de la mesure. Mesure de Lebesgue. Fonctions mesurables, étagées mesurables positives. Construction de l'intégrale de Lebesgue. Théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée. Intégrales à paramètres. Séries de Fourier, transformée de Laplace, de Fourier. Théorèmes de Fubini-Tonelli et de Fubini. Théorème du changement de variables. Intégrales curvilignes, Green-Riemann, calculs de longueur, d'aires et de volumes.

*Summable families. Measure Theory. Lebesgue measure. Measurable functions, positive measurable functions. Construction of the Lebesgue integral. Monotonic convergence and dominated convergence theorems. Integrals with parameters. Fourier series, Laplace transformation, Fourier transformation. Fubini-Tonelli and Fubini theorems. Change of variable Theorem. Curvilinear integrals, Green-Riemann, calculations of lengths, areas and volumes.*

### **LMo5D, Algèbre 1 (Option - 6 ECTS - 50h)**

#### **LMo5D, Algebra 1 (Option - 6 ECTS - 50h)**

Groupes, générateurs et sous-groupes, homomorphismes, théorème de Lagrange, groupes abéliens finis, groupes symétriques, groupes de matrices. Définitions d'anneau et de corps, homomorphismes d'anneaux, idéaux, sous-anneaux, anneau de polynômes, anneaux euclidiens.

*Groups, generators and subgroups, homomorphisms, Lagrange theorem, finite abelian groups, symmetric groups, matrix groups. Definitions of rings and fields, ring homomorphisms, ideals, subrings, polynomial rings, Euclidean rings.*

### **LMo5E, Algèbre linéaire et bilinéaire (Option - 6 ECTS - 50h)**

#### **LMo5E, Linear and bilinear algebra (Option - 6 ECTS - 50h)**

Algèbre linéaire : Espaces vectoriels de dimension infinie. Dualité, passage au quotient, orthogonalité. Groupe linéaire. Réduction. réduction simultanée, réduction de Jordan. Éléments d'analyse matricielle. Algèbre bilinéaire : formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques associées. Réduction de Gauss, théorème de Sylvester. Classification des coniques et des quadriques. Espaces préhilbertiens réels et complexes. Endomorphismes d'un espace vectoriel préhilbertiens. Théorème de réduction simultanée. Groupe orthogonal, groupe unitaire.

*Linear algebra: Infinite dimensional vector spaces. Duality, quotients, orthogonality. Linear groups. Reduction. simultaneous reduction, Jordan reduction. Elements of matrix analysis. Bilinear algebra: symmetric bilinear forms, associated quadratic forms. Gaussian reduction, Sylvester Theorem. Classification of conics and quadrics. Real and complex prehilbertian spaces. Endomorphisms of a prehilbertian vector spaces. Simultaneous reduction theorem. Orthogonal group, unitary group.*

### **LMo5F, Analyse numérique (Option - 6 ECTS - 50h)**

#### **LMo5F, Numerical analysis (Option - 6 ECTS - 50h)**

Systèmes linéaires. Généralités sur l'analyse matricielle. Normes et conditionnement d'une matrice. Méthodes directes : méthode d'élimination de Gauss et décomposition LU, méthode de Cholesky. Méthodes itératives : Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation. Valeurs et vecteurs propres : méthode de la puissance et de la puissance inverse, méthode QR. Systèmes non-linéaires. Méthodes de point fixe : méthode de Newton-Raphson (à une et à plusieurs variables). Interpolation et approximation. Interpolation de Lagrange. Polynôme d'interpolation de Newton et interpolation de Hermite. Approximation par splines. Polynômes orthogonaux.

*Linear systems. Some matrix analysis. Standards and conditioning of a matrix. Direct methods: Gaussian elimination method and LU decomposition, Cholesky method. Iterative methods: Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation. Eigenvalues and vectors: method of power and inverse power, QR method. Non-linear systems. Fixed point methods: Newton-Raphson method (with one and with several variables). Interpolation and approximation. Lagrange interpolation. Newton interpolation polynomial and Hermite interpolation. Approximation by splines. Orthogonal polynomials.*

## **Cours du semestre 2 (janvier - mai)**

### ***Courses of Semester 2 (January - May)***

**LM6A1, Anglais (Cours obligatoire - 3 ECTS - 25h)**

***LM6A1, English (Compulsory course - 3 ECTS - 25h)***

**LM6A2, Projet (Cours obligatoire - 3 ECTS- 25h)**

***LM6A2, Project (Compulsory course - 3 ECTS- 25h)***

Projet de calcul numérique ou de calcul formel sur ordinateur.

*Project on a computer on numerical analysis or on formal calculus.*

**LM6oB1, Techniques de programmation (Option - 3 ECTS - 25h)**

***LM6oB1, Programming techniques (Option - 3 ECTS - 25h)***

Quelques algorithmes avec Python. Introduction à l'algorithmique. Résolution de la grille d'un Sudoku. Algorithmes de tri : tri rapide, tri par insertion, tri par fusion, tri aléatoire. Résolution numérique des EDO en traitant quelques exemples pratiques (avec sortie graphique). Calcul matriciel : résolution de systèmes d'équations par la méthode d'élimination de Gauss, décomposition LU, résolution d'un système  $AX=B$  par décomposition LU.

*Algorithms with Python. Introduction to algorithms. Solving Sudoku grids. Sorting algorithms: quick sort, insertion sort, merge sort, random sort. Numerical resolution of ODEs by treating some practical examples (with graphic output). Matrix calculation: resolution of linear systems with Gauss elimination method, LU decomposition, resolution of a system  $AX=B$  by LU decomposition.*

**LM6oB2, Équations différentielles ordinaires (Option - 3 ECTS - 25h)**

***LM6oB2, Ordinary differential equations (Option - 3 ECTS - 25h)***

Théorème de l'existence et de l'unicité des solutions des équations différentielles, Théorème de redressement (flow-box) , Portrait de phase Points singuliers, hyperbolicité, théorème de Hartman-Grobman, Portrait de phase des systèmes d'équations linéaires dans le plan et applications, Stabilité de Lyapunov, Bifurcation de Hopf.

*Theorem of existence and uniqueness of the solutions of differential equations, Flow-box theorem, Phase portrait Singular points, hyperbolicity, Hartman-Grobman theorem, phase portrait of systems of linear equations in the plane and applications, Lyapunov stability, Hopf bifurcation.*

### **LM6oB3, Didactique des mathématiques (Option - 3 ECTS - 25h)**

#### **LM6oB3, Didactics in mathematics (Option - 3 ECTS - 25h)**

Ce module est une introduction à la didactique des mathématiques qui concerne les étudiants se destinant au professorat des écoles ou au professorat de mathématiques en collège et lycée.

*This course is an introduction to the didactics in mathematics that concerns students destined for teacher in primary school, secondary school, or high school.*

### **LMo6C, Algèbre 2 (Option - 6 ECTS - 50h)**

#### **LMo6C, Algebra 2 (Option - 6 ECTS - 50h)**

Groupes : Sous-groupes distingués, groupes quotients, isométries de  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{R}^3$ , Actions des groupes. Anneaux et corps : Idéaux premiers, idéaux maximaux, anneaux intègres, anneaux principaux, anneaux factoriels, entiers de Gauss.

*Groups: Normal subgroups, quotient groups, isometries in  $\mathbf{R}^2$  and  $\mathbf{R}^3$ , group actions. Rings and fields: Prime ideals, maximal ideals, integral rings, principal rings, factorial rings, Gaussian integers.*

### **LMo6D, Analyse fonctionnelle (Option - 6 ECTS - 50h)**

#### **LMo6D, Functional analysis (Option - 6 ECTS - 50h)**

Espaces  $L^p$  comme classe importante d'espaces de Banach. Théorèmes d'Arzelà-Ascoli et de Stone-Weierstrass. Théorèmes de densité dans les espaces  $L^p$ . Éléments sur la dualité dans les espaces  $L^p$ . Espaces de Hilbert. Théorème de projection. Somme directe hilbertienne. Bases hilbertiennes. Convergence des séries de Fourier dans le cadre hilbertien. Notions sur les opérateurs sur un espace de Hilbert. Produit de convolution dans les espaces  $L^p$ . Transformée de Fourier sur les espaces fonctionnels classiques.

*$L^p$  spaces as an important class of Banach spaces. Arzelà-Ascoli and Stone-Weierstrass theorems. Density theorem in  $L^p$  spaces. Elements on duality in  $L^p$  spaces. Hilbert spaces. Projection theorem. Hilbert direct sum. Hilbertian bases. Convergence of the Fourier series in the Hilbert framework. Notions on operators on Hilbert spaces. Product of convolution in  $L^p$  spaces. Fourier transformations on classical functional spaces.*

### **LMo6E, Théorie des probabilités (Option - 6 ECTS - 50h)**

#### **LMo6E, Probability (Option - 6 ECTS - 50h)**

Espaces probabilisés : mesure, densité de probabilité, mesure image. Énoncé du théorème d'unicité. Variables aléatoires discrètes et continues, théorème de transfert. Intégrale par rapport à une mesure quelconque, retour sur l'espérance. Moments. Fonctions de répartition : définition, caractérisation de la loi. Fonctions caractéristiques : définition et énoncé du théorème de caractérisation de la loi. Suite de variables aléatoires indépendantes. Différentes notions de convergence. Loi faible (et forte avec un moment d'ordre 2) des grands nombres. Convergence en loi et Théorème de la Limite centrale.

*Probability spaces: measure, probability density, image measure. Statement of the theorem of uniqueness. Discrete and continuous random variables, transfer theorem.*

*Integral in relation to any measure, return to expected values. Moments. Distribution functions: definition, characterization of the law. Characteristic functions: definition and statement of the characterization theorem of the law. Sequence of independent random variables. Different notions of convergence. Weak (and strong with a moment of order 2) law of large numbers. Convergence in law and the Central Limit Theorem.*

### **LMo6F, Statistique inférentielle (Option - 6 ECTS - 50h)**

#### ***LMo6F, Inferential Statistics (Option - 6 ECTS - 50h)***

Statistique descriptive dans  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}^2$ . Principales familles de lois absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Modèles statistiques et estimateurs. Propriétés élémentaires et de convergence des estimateurs de la moyenne et de la variance. Construction d'intervalles de confiance. Introduction aux tests d'hypothèses. Introduction aux sondages aléatoires.

*Descriptive statistics in  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{R}^2$ . Main families of absolutely continuous laws with respect to the Lebesgue measure. Statistical models and estimators. Elementary and convergence properties of the estimators of the average and of the variance. Construction of confidence intervals. Introduction to hypothesis testing. Introduction to random polls.*

### **LMo6G1, Géométrie, courbes et surfaces (Option - 6 ECTS - 50h)**

#### ***LMo6G1, Geometry, curves and surfaces (Option - 6 ECTS - 50h)***

Inversion dans le plan et l'espace : Axe radical. Inversion et faisceaux de cercles et de droites. Projections stéréographiques : complétion du plan par un point « à l'infini », sphère de Riemann. Pôles et polaires par rapport à un cercle/conique comme introduction à la géométrie projective. Théorème de la polaire. Pôles-polaires (notion de dualité affine). Complétion du plan par une droite à l'infini. Dualité projective. Calcul des courbes duales des coniques paramétrées. Plan projectif comme ensemble des droites vectorielles de  $\mathbf{R}^3$ . Courbes planes. Courbure. Application de Gauss. Courbes équidistantes et centres de courbure. Courbes de l'espace. Courbure, torsion et équations de Frenet. Premiers éléments sur les surfaces. Courbures principales et seconde forme fondamentale. Application de Gauss.

*Inversion in plane and space: Radical axis. Inversion and bundles of circles and lines. Stereographic projections: completion of the plane by a point "at infinity", Riemann sphere. Poles and polars with respect to a circle/conic as an introduction to projective geometry. Polar theorem. Poles-polar (notion of affine duality). Completion of the plane by a straight line at infinity. Projective duality. Calculation of dual curves of parameterized conics. Projective plane as a set of lines of  $\mathbf{R}^3$ . Curves in the plane. Curvature. Gauss map. Equidistant curves and centers of curvature. Curves in 3-space. Curvature, torsion and Frenet equations. First elements on surfaces. Main curves and second fundamental form. Gauss map.*